

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(отдельный оттиск)

5

МОСКВА • 1986

НЕКОТОРЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ РЕКУРРЕНТНОЙ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

КОЛЕССА А. Е.

(Москва)

Рассматриваются случаи кусочно-линейной фильтрации, в которых удается вычислить фигурирующие в формулах фильтрации многомерные интегралы от гауссовской плотности вероятности. Предлагается способ приближенного решения задачи нелинейной фильтрации и приводится пример.

1. Введение

Статья является продолжением работы [1].

Используются следующие обозначения: E_k — k -мерное евклидово пространство; x^T — транспонированный вектор (или матрица); $\triangleq$ — «...тогда и только тогда, когда...»;

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt;$$

$$N_x\{m, \Gamma\} = (2\pi)^{-k/2} (\det \Gamma)^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x-m)^T \Gamma^{-1} (x-m) \right\}, \quad x \in E_k.$$

2. Понижение порядка интегрирования

Метод кусочно-линейной фильтрации, изложенный в [1], требует вычисления интегралов вида

$$\begin{aligned} P &= \int_T N_x\{m, \Gamma\} dx, \quad S = \int_T x N_x\{m, \Gamma\} dx, \\ Q &= \int_T (x-\Lambda)(x-\Lambda)^T N_x\{m, \Gamma\} dx, \end{aligned} \quad (1)$$

где $x, \Lambda \in E_k$; T — область в E_k . Представим x, m, Λ, Γ в блочном виде:

$$x = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}, \quad m = \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} \end{Bmatrix}, \quad \Lambda = \begin{Bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где $x_1, m_1, \Lambda_1, x_2, m_2, \Lambda_2, \Gamma_{11}, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}$ имеют соответственно размерности $k_1, k_1, k_1, k_2, k_2, k_2$ и размеры $k_1 \times k_1, k_1 \times k_2, k_2 \times k_2$.

Пусть область интегрирования T имеет вид

$$x \in T \triangleq \{x_1 \in \hat{T}, x_2 \in E_{k_2}\}, \quad (3)$$

где $\hat{T}$ — область E_{k_1} .

Такой случай возникает в задачах кусочно-линейной фильтрации, в которых уравнения системы нелинейны лишь по части компонент вектора состояния (см. раздел 4).

Лемма 1. При условии (3) интегралы (1) могут быть приведены к виду

$$P = \hat{P}, \quad S = \begin{Bmatrix} \hat{S} \\ \hat{P}m_2 + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} (\hat{S} - \hat{P}m_1) \end{Bmatrix}, \quad Q = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

где

$$(5) \quad \hat{P} = \int_{\bar{T}} N_{x_1} \{m_1, \Gamma_{11}\} dx_1, \quad \hat{S} = \int_{\bar{T}} x_1 N_{x_1} \{m_1, \Gamma_{11}\} dx_1,$$

$$(6) \quad Q_{11} = \bar{Q} + (m_1 - \Lambda_1) (\hat{S} - \hat{P} m_1)^T + (\hat{S} - \hat{P} m_1) (m_1 - \Lambda_1)^T + \\ + \hat{P} (m_1 - \Lambda_1) (m_1 - \Lambda_1)^T,$$

$$(7) \quad Q_{12} = (\bar{Q} + (m_1 - \Lambda_1) (\hat{S} - \hat{P} m_1)^T) \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12} + (\hat{S} - \hat{P} \Lambda_1) (m_2 - \Lambda_2)^T,$$

$$(8) \quad Q_{22} = \hat{P} [(\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}) + (m_2 - \Lambda_2) (m_2 - \Lambda_2)^T] + \\ + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} \bar{Q} \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12} + \\ + (m_2 - \Lambda_2) (\hat{S} - \hat{P} m_1)^T \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12} + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} (\hat{S} - \hat{P} m_1) (m_2 - \Lambda_2)^T,$$

$$(9) \quad \hat{Q} = \int_{\bar{T}} (x_1 - m_1) (x_1 - m_1)^T N_{x_1} \{m_1, \Gamma_{11}\} dx_1.$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Таким образом, для кусочно-линейных задач фильтрации, в которых уравнения системы нелинейны лишь по k_1 компонентам k -мерного вектора состояния, k -кратные интегралы P, S, Q выражаются через k_1 -кратные интегралы $\hat{P}, \hat{S}, \hat{Q}$ того же типа.

Следующие леммы позволяют вычислить интегралы типа P, S, Q ($\hat{P}, \hat{S}, \hat{Q}$) для случая $k=1$, T — интервал в E_1 , а также для случая $k=2$, T — многоугольник в E_2 .

Лемма 2. Пусть интегралы P, S, Q заданы в силу (1), $k=1$, $x \in T \Leftrightarrow \langle \Rightarrow \{x_m \leq x \leq x_M\}$. Тогда

$$P = 1/2 (\operatorname{erf} \{ (x_M - m) / \sqrt{2\Gamma} \} - \operatorname{erf} \{ (x_m - m) / \sqrt{2\Gamma} \}), \\ S = Pm - \sqrt{\Gamma/2\pi} (\exp \{ -(x_M - m)^2 / 2\Gamma \} - \exp \{ -(x_m - m)^2 / 2\Gamma \}), \\ Q = P\Gamma - \sqrt{\Gamma/2\pi} ((x_M - m) \exp \{ -(x_M - m)^2 / 2\Gamma \} - \\ - (x_m - m) \exp \{ -(x_m - m)^2 / 2\Gamma \}).$$

Поскольку вычисление интегралов P, S, Q в данном случае не представляет труда, доказательство леммы не приводится.

Лемма 3. Пусть интегралы P, S, Q заданы в силу (1), $k=2$, область интегрирования T представляет собой многоугольник, заданный своими вершинами $x' = \|x_1^i, x_2^i\|^T$, $i=1, \dots, N$, занумерованными в порядке обхода против часовой стрелки,

$$(10) \quad x = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|, \quad m = \left\| \begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma = \left\| \begin{matrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12} & \Gamma_{22} \end{matrix} \right\|.$$

Задавая многоугольник $\bar{T}$ вершинами $(\bar{x}_1^i, \bar{x}_2^i)$, $i=1, \dots, N$, где

$$(11) \quad \bar{x}_1^i = \frac{1}{2\sqrt{1+\rho}} \left(\frac{x_1^i - m_1}{\sigma_1} + \frac{x_2^i - m_2}{\sigma_2} \right), \\ \bar{x}_2^i = \frac{-1}{2\sqrt{1-\rho}} \left(\frac{x_1^i - m_1}{\sigma_1} - \frac{x_2^i - m_2}{\sigma_2} \right), \\ \rho = \Gamma_{12} / \sqrt{\Gamma_{11}\Gamma_{22}}, \quad \sigma_1^2 = \Gamma_{11}, \quad \sigma_2^2 = \Gamma_{22},$$

положим

$$\bar{x}_1^{N+1} = \bar{x}_1^1, \quad \bar{x}_2^{N+1} = \bar{x}_2^1.$$

Тогда

$$(12) \quad P = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{T}} \exp \{ -(x_1^2 + x_2^2) \} dx_1 dx_2,$$

$$(13) \quad S = \left\| \begin{matrix} S_1 \\ S_2 \end{matrix} \right\|, \quad Q = \left\| \begin{matrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{matrix} \right\|,$$

где

$$(14) \quad S_1 = P m_1 + \sigma_1 (\sqrt{1+\rho} C_1 - \sqrt{1-\rho} C_2),$$

$$(15) \quad S_2 = P m_2 + \sigma_2 (\sqrt{1+\rho} C_1 + \sqrt{1-\rho} C_2),$$

$$(16) \quad Q_{11} = \sigma_1^2 [(1+\rho) q_{11} - 2\sqrt{1-\rho^2} q_{12} + (1-\rho) q_{22}] / \pi,$$

$$(17) \quad Q_{12} = \sigma_1 \sigma_2 [(1+\rho) q_{11} - (1-\rho) q_{22}] / \pi,$$

$$(18) \quad Q_{22} = \sigma_2^2 [(1+\rho) q_{11} + 2\sqrt{1-\rho^2} q_{12} + (1-\rho) q_{22}] / \pi,$$

$$(19) \quad C_1 = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \lambda_i, \quad C_2 = \frac{-1}{4\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_i,$$

$$(20) \quad q_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N v_i + \frac{\pi}{2} P, \quad q_{12} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \kappa_i, \quad q_{22} = \frac{\pi}{2} P + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^N \hat{v}_i,$$

где, в свою очередь,

$$\lambda_i = \begin{cases} X(\alpha_i, \beta_i, \bar{x}_1^i, \bar{x}_1^{i+1}) & \text{при } \bar{x}_1^i \neq \bar{x}_1^{i+1}, \\ \exp\{-(\bar{x}_1^i)^2\} (\operatorname{erf}\{\bar{x}_2^{i+1}\} - \operatorname{erf}\{\bar{x}_2^i\}) & \text{при } \bar{x}_1^i = \bar{x}_1^{i+1}, \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}_i = \begin{cases} X(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \bar{x}_2^i, \bar{x}_2^{i+1}) & \text{при } \bar{x}_2^i \neq \bar{x}_2^{i+1}, \\ \exp\{-(\bar{x}_2^i)^2\} (\operatorname{erf}\{\bar{x}_1^{i+1}\} - \operatorname{erf}\{\bar{x}_1^i\}) & \text{при } \bar{x}_2^i = \bar{x}_2^{i+1}, \end{cases}$$

$$v_i = \begin{cases} Y(\alpha_i, \beta_i, \bar{x}_1^i, \bar{x}_1^{i+1}) & \text{при } \bar{x}_1^i \neq \bar{x}_1^{i+1}, \\ -\sqrt{\pi} \bar{x}_1^i \exp\{-(\bar{x}_1^i)^2\} (\operatorname{erf}\{\bar{x}_2^{i+1}\} - \operatorname{erf}\{\bar{x}_2^i\}) & \text{при } \bar{x}_1^i = \bar{x}_1^{i+1}, \end{cases}$$

$$\hat{v}_i = \begin{cases} Y(\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \bar{x}_2^i, \bar{x}_2^{i+1}) & \text{при } \bar{x}_2^i \neq \bar{x}_2^{i+1}, \\ -\sqrt{\pi} \bar{x}_2^i \exp\{-(\bar{x}_2^i)^2\} (\operatorname{erf}\{\bar{x}_1^{i+1}\} - \operatorname{erf}\{\bar{x}_1^i\}) & \text{при } \bar{x}_2^i = \bar{x}_2^{i+1}, \end{cases}$$

$$\kappa_i = \begin{cases} Z(\alpha_i, \beta_i, \bar{x}_1^i, \bar{x}_1^{i+1}) & \text{при } \bar{x}_1^i \neq \bar{x}_1^{i+1}, \\ \exp\{-(\bar{x}_1^i)^2\} (\exp\{-(\bar{x}_2^{i+1})^2\} - \exp\{-(\bar{x}_2^i)^2\}) & \text{при } \bar{x}_1^i = \bar{x}_1^{i+1}, \end{cases}$$

а функции $X(\cdot)$, $Y(\cdot)$, $Z(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$, $\Psi(\cdot)$ имеют вид

$$X(\alpha, \beta, x, y) = \beta \exp\{-\alpha^2/(1+\beta^2)\} \Phi(\alpha, \beta, x, y) / \sqrt{1+\beta^2},$$

$$Y(\alpha, \beta, x, y) = \beta \exp\{-\alpha^2/(1+\beta^2)\} [\Psi(\alpha, \beta, x, y) + \sqrt{\pi} \alpha \beta \Phi(\alpha, \beta, x, y) / \sqrt{1+\beta^2}] / (1+\beta^2),$$

$$Z(\alpha, \beta, x, y) = \exp\{-\alpha^2/(1+\beta^2)\} [\beta^2 \Psi(\alpha, \beta, x, y) - \sqrt{\pi} \alpha \beta \Phi(\alpha, \beta, x, y) / \sqrt{1+\beta^2}] / (1+\beta^2),$$

$$\Phi(\alpha, \beta, x, y) = \operatorname{erf}\{\sqrt{1+\beta^2} y + \alpha \beta / \sqrt{1+\beta^2}\} - \operatorname{erf}\{\sqrt{1+\beta^2} x + \alpha \beta / \sqrt{1+\beta^2}\},$$

$$\Psi(\alpha, \beta, x, y) = \exp\{-(\sqrt{1+\beta^2} y + \alpha \beta / \sqrt{1+\beta^2})^2\} - \exp\{-(\sqrt{1+\beta^2} x + \alpha \beta / \sqrt{1+\beta^2})^2\},$$

причем при $\bar{x}_1^i \neq \bar{x}_1^{i+1}$

$$\alpha_i = (\bar{x}_2^i \bar{x}_1^{i+1} - \bar{x}_2^{i+1} \bar{x}_1^i) / (\bar{x}_1^{i+1} - \bar{x}_1^i), \quad \beta_i = (\bar{x}_2^{i+1} - \bar{x}_2^i) / (\bar{x}_1^{i+1} - \bar{x}_1^i),$$

а при $\bar{x}_2^i \neq \bar{x}_2^{i+1}$

$$\hat{\alpha}_i = (\bar{x}_2^{i+1} \bar{x}_1^i - \bar{x}_2^i \bar{x}_1^{i+1}) / (\bar{x}_2^{i+1} - \bar{x}_2^i), \quad \hat{\beta}_i = (\bar{x}_1^{i+1} - \bar{x}_1^i) / (\bar{x}_2^{i+1} - \bar{x}_2^i).$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Таким образом в случае $T \subset E_2$ удалось выразить интегралы S , Q через интеграл P . Алгоритм и соответствующая программа вычисления P с по-

мощью интеграла Оуэна

$$I(h, a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^a \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \right\} dx_1 dx_2,$$

являющегося двумерным аналогом функции $\text{erf}(x)$, приведены в [2] (см. также [3]).

3. Приближенный синтез фильтра на основе аппроксимации нелинейностей кусочно-линейными функциями

Воспользуемся полученными для кусочно-линейного случая результатами работы [1] для приближенного синтеза оптимального в среднеквадратическом смысле фильтра применительно к системам, содержащим нелинейности $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ (см. уравнения (12) в [1]), не являющиеся кусочно-линейными.

Разобьем E_k на совокупность непересекающихся областей Ω_i , $i = 1, \dots, n$ так, чтобы функции $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ в пределах каждого Ω_i достаточно хорошо аппроксимировались линейными функциями, а изменение градиентов $f'(\cdot)$, $h'(\cdot)$ на всем E_k равномерно распределялось между областями Ω_i , $i = 1, \dots, n$.

Пусть $\hat{\theta}_i \in \Omega_i$, $i = 1, \dots, n$ — некоторые «опорные» точки. При допущении, что в пределах каждого Ω_i функции $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ линейны, в качестве $\hat{\theta}_i$ можно выбрать произвольную точку Ω_i , например «центр тяжести» области Ω_i или оценку Λ_i компоненты θ_i при условии $\Lambda_i \in \Omega_i$. Тогда кусочно-линейная аппроксимация функций $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ будет иметь вид

$$(21) \quad f(\theta) = \sum_{i=1}^n I_{\Omega_i}(\theta) [a_i + A_i \theta], \quad h(\theta) = \sum_{i=1}^n I_{\Omega_i}(\theta) [b_i + B_i \theta],$$

где

$$(22) \quad a_i = f(\hat{\theta}_i) - f'(\hat{\theta}_i) \hat{\theta}_i, \quad A_i = f'(\hat{\theta}_i),$$

$$(23) \quad b_i = h(\hat{\theta}_i) - h'(\hat{\theta}_i) \hat{\theta}_i, \quad B_i = h'(\hat{\theta}_i).$$

Аппроксимация (21)–(23) позволяет воспользоваться результатами работы [1] непосредственно.

4. Пример. Обсуждение результатов

Для иллюстрации результатов, полученных в [1] и настоящей работе, рассмотрим следующий пример.

Пусть $(2+1)$ -мерная последовательность (θ_t, ξ_t) задается для $t = 0, 1, \dots$ уравнениями

$$(24) \quad \theta_{t+1} = f(\theta_t), \quad \xi_{t+1} = h(\theta_{t+1}) + H \eta_{t+1},$$

где

$$(25) \quad \theta_t = \left\| \begin{matrix} \theta_t^{(1)} \\ \theta_t^{(2)} \end{matrix} \right\|, \quad f(\theta_t) = \left\| \begin{matrix} \theta_t^{(1)} \\ \theta_t^{(2)} - K_t / \theta_t^{(1)} \end{matrix} \right\|,$$

$$h(\theta_t) = \theta_t^{(2)}, \quad K_t = g(\Delta t)^2 (t - 0.5),$$

(η_t) , $t = 1, 2, \dots$ — последовательность независимых гауссовских величин с $M\eta_t = 0$, $M\eta_t^2 = 1$, причем θ_0 и (η_t) предполагаются независимыми.

Считается заданной $p_{\theta_0 | \xi_0}(x_0 | y_0) = N_{x_0} \{m_0, \Gamma_0\}$.

Требуется построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку Λ_t ненаблюдаемой двумерной компоненты θ_t по измерениям $(y_1, \dots, y_t)$ одномерной компоненты ξ_t , а также определить условную ковариационную матрицу ошибок фильтрации Δ_t .

Рассматриваемый пример соответствует задаче оценивания дальности $\theta_t^{(1)}$ и угла места $\theta_t^{(2)}$ материального объекта, падающего вертикально

с ускорением свободного падения g , по измерениям угла $\theta_i^{(2)}$, производимым с темпом Δt в окрестности нулевого угла места $\theta_i^{(2)}$.

Для приближенного синтеза оптимального фильтра произведем кусочно-линейную аппроксимацию системы (24).

Пусть (x_m, x_M) есть $100(1-P_d)$ — процентный доверительный интервал для $\theta_0^{(1)}$, где P_d — некоторая заданная вероятность, близкая к нулю. Разобьем E_2 на совокупность непересекающихся областей Ω_i , $i=1, \dots, n$ следующим образом:

$$(26) \quad \theta_i \in \Omega_i \Leftrightarrow \{\bar{x}_{i-1} < \theta_i^{(1)} \leq x_i, \theta_i^{(2)} \in E_1\},$$

где

$$(27) \quad \bar{x}_i = x_m x_M [(i/n)x_m^2 + (1-i/n)x_M^2]^{-1/2},$$

причем при $\theta_i^{(1)} \leq \bar{x}_0$ или $\theta_i^{(1)} > \bar{x}_n$ будем считать соответственно, что $\theta_i \in \Omega_1$ или $\theta_i \in \Omega_n$. Из (25) следует, что

$$f'(\theta_i) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ K_i/(\theta_i^{(1)})^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Можно убедиться, что разбиение (26), (27) делит область значений, принимаемых элементом $K_i/(\theta_i^{(1)})^2$ матрицы $f'(\theta_i)$, на n интервалов одинаковой длины при изменении $\theta_i^{(1)}$ в пределах интервала (x_m, x_M) .

Обозначим $\Lambda_i^{(i)}$, $i=1, 2$ — компоненты вектора Λ_i . В соответствии с (22), (23) для $i=1, \dots, n$ получаем

$$(28) \quad a_i(t) = \begin{vmatrix} 0 \\ -2K_i/\hat{x}_i \end{vmatrix}, \quad A_i(t) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ K_i/(\hat{x}_i)^2 & 1 \end{vmatrix}, \quad b_i=0, \quad B_i=\|0, 1\|,$$

где

$$\hat{x}_i = (\bar{x}_{i-1} + \bar{x}_i)/2.$$

В соответствии с теоремой 2 и замечанием 2 из [1] оптимальный в среднеквадратическом смысле фильтр для кусочно-линейной системы с параметрами (28) имеет вид

$$(29) \quad \Lambda_i = \sum_{t=1}^n U_t^i S_t^i / D_i, \quad \Delta_i = \sum_{t=1}^n U_t^i Q_t^i / D_i, \quad D_i = \sum_{t=1}^n U_t^i P_t^i, \\ P_t^i = \int_{\Omega_i} N_x \{m_t^i, \Gamma_t^i\} dx, \quad S_t^i = \int_{\Omega_i} x N_x \{m_t^i, \Gamma_t^i\} dx, \\ Q_t^i = \int_{\Omega_i} (x - \Lambda_i) (x - \Lambda_i)^T N_x \{m_t^i, \Gamma_t^i\} dx,$$

а m_t^i , Γ_t^i , U_t^i удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$m_t^i = e_t^i + V_t^i B_i^T [W_t^i]^{-1} [y_t - B_i e_t^i], \quad e_t^i = a_i(t) + A_i(t) m_{t-1}^i, \\ \Gamma_t^i = V_t^i - V_t^i B_i^T [W_t^i]^{-1} B_i V_t^i, \\ V_t^i = A_i(t-1) \Gamma_{t-1}^i A_i^T(t-1), \quad W_t^i = H^2 + B_i V_t^i B_i^T,$$

решаемым с начальными условиями $m_0^i = m_0$, $\Gamma_0^i = \Gamma_0$.

С учетом (26) для интегралов P_t^i , S_t^i , Q_t^i в силу лемм 1, 2 можно получить следующие выражения:

$$(30) \quad P_t^i = \bar{P}, \quad S_t^i = \begin{vmatrix} \bar{S} \\ \bar{P} m_1 + (\bar{S} - \bar{P} m_1) \Gamma_{12} / \Gamma_{11} \end{vmatrix}, \quad Q_t^i = \begin{vmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{vmatrix},$$

где

$$\bar{P} = 1/2 (\operatorname{erf} \{ (\bar{x}_i - m_1) / \sqrt{2\Gamma_{11}} \} - \operatorname{erf} \{ (\bar{x}_{i-1} - m_1) / \sqrt{2\Gamma_{11}} \}), \\ \bar{S} = \bar{P} m_1 - \sqrt{\Gamma_{11}/2\pi} (\exp \{ -(\bar{x}_i - m_1)^2 / 2\Gamma_{11} \} - \\ - \exp \{ -(\bar{x}_{i-1} - m_1)^2 / 2\Gamma_{11} \}),$$

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \bar{Q} + 2(m_1 - \Lambda_1)(\hat{S} - \bar{P}m_1) + \bar{P}(m_1 - \Lambda_1)^2, \\
Q_{12} &= [\bar{Q} + (m_1 - \Lambda_1)(\hat{S} - \bar{P}m_1)]\Gamma_{12}/\Gamma_{11} + (\hat{S} - \bar{P}\Lambda_1)(m_2 - \Lambda_2), \\
Q_{22} &= \bar{P}[\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^2/\Gamma_{11} + (m_2 - \Lambda_2)^2] + \bar{Q}\Gamma_{12}^2/\Gamma_{11}^2 + \\
&+ 2(m_2 - \Lambda_2)(\hat{S} - \bar{P}m_1)\Gamma_{12}/\Gamma_{11}, \\
Q &= \bar{P}\Gamma_{11} - \sqrt{\Gamma_{11}/2\pi} [(\bar{x}_i - m_1) \exp\{-(\bar{x}_i - m_1)^2/2\Gamma_{11} - \\
&- (\bar{x}_{i-1} - m_1) \exp\{-(\bar{x}_{i-1} - m_1)^2/\Gamma_{11}\}].
\end{aligned}$$

Здесь для простоты обозначений у компонент (m_1, m_2) , (Λ_1, Λ_2) векторов m_i , Λ_i соответственно, а также у элементов Γ_{11} , Γ_{12} , Γ_{22} матрицы Γ_i опущены индексы i, t . Это же относится и к величинам $\bar{P}$, $\hat{S}$, $\bar{Q}$, Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} .

При исследовании точности фильтрации с помощью усреднения по методу Монте-Карло значение x_0 случайной величины θ_0 рассматривалось

как параметр, а датчиком случайных чисел генерировались только ошибки измерения. Для исследования точности оценивания координаты $\theta_i^{(1)}$ (дальность) вычислялись два типа усредненных показателей:

$$r_i = \left(\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_i^{(1)} - \mu_i^i)^2 \right)^{1/2},$$

$$\tau_i = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L (x_i^{(1)} - \mu_i^i)^2 / \delta_i^i,$$

где L — число реализаций; $x_i^{(1)}$ — значение дальности $\theta_i^{(1)}$, полученное в силу (24), (25) при условии $\theta_0 = x_0$; μ_i^i , δ_i^i — соответственно оценка и средний квадрат ошибки оценивания компоненты $\theta_i^{(1)}$, полученные в силу тех или иных формул фильтрации в i -й реализации.

При $\tau_i > 1$ фильтр в определенном смысле расходится, при $\tau_i < 1$ рассчитанная в силу формул фильтрации дисперсия ошибки оценивания δ_i компо-

ненты $\theta_i^{(1)}$ оказывается завышенной и тем самым фильтр является излишне консервативным. При $\tau_i = 1$ величина δ_i совпадает со средним квадратом ошибки оценивания компоненты $\theta_i^{(1)}$.

При расчетах использовались условные единицы расстояния [у.е.]. Принималось, что $g = 10^{-4}$ [у.е./с²], $x_m = 5$ [у.е.], $x_M = 50$ [у.е.], $H = 10^{-6}$, $L = 20$, $n = 100$,

$$m_0 = \left\| \begin{matrix} \bar{x}_{n/2} \\ 0,1 \end{matrix} \right\|, \quad \Gamma_0 = \left\| \begin{matrix} (x_M - x_m)^2/12 & 0 \\ 0 & 10^{-12} \end{matrix} \right\|.$$

Для сравнения рассматривались фильтры двух типов. Сплошными линиями на рисунке изображены как функции t показатели r_i , τ_i для фильтра (29), (30) соответственно для начальных условий $x_0^T = \|5; 0,1\|$, $x_0^T = \|50; 0,1\|$. Там же пунктирными линиями изображены аналогичные результаты для расширенного фильтра Калмана [4].

Исследование точности фильтрации непосредственно измеряемой ком-

попененты $\theta_i^{(2)}$ интереса не представляет и соответствующие результаты не приводятся.

Анализ результатов, представленных на рисунке, позволяет заключить, что в рассмотренных случаях кусочно-линейный фильтр (29), (30) обеспечивал высокую точность оценивания компоненты $\theta_i^{(1)}$, причем величина τ_i была близка к единице, что отражает хорошее согласование рассчитанной в силу формул фильтрации и полученной в результате усреднения по методу Монте-Карло среднеквадратических ошибок фильтрации.

В то же время среднеквадратическая ошибка оценивания для расширенного фильтра Калмана оказалась недопустимо высокой, причем показатель τ_i резко возрастал при увеличении t , т. е. отмечалось явление расходимости.

При расчетах число членов, вносящих сколько-нибудь заметный вклад в суммы (29), в среднем при $t=1, \dots, 10$ представляло собой последовательность 78, 24, 7, 5, 4, 3, 1, 1, 1, 1, т. е. быстро уменьшалось с увеличением числа измерений. Это обстоятельство позволяет надеяться, что эффективным методом сокращения требуемого для реализации кусочно-линейного фильтра объема вычислений является отсечение ветвей (см. [4]) с низким вкладом в суммы (29).

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы 1. Пусть $\theta = \|\theta_1^T, \theta_2^T\|^T$ — гауссовский $(k_1 + k_2)$ -мерный вектор с $p_\theta(x) = N_x\{m, \Gamma\}$, причем x, m, Γ имеют блочную структуру (2). В силу формулы Байеса

$$p_\theta(x) = p_{\theta_1}(x_1) p_{\theta_2|\theta_1}(x_2|x_1)$$

и теоремы о нормальной корреляции [5] имеет место тождество

$$(П.1) \quad N_x\{m, \Gamma\} = N_{x_1}\{m_1, \Gamma_1\} N_{x_2}\{m^*(x_1), \Gamma^*\},$$

где

$$(П.2) \quad m^*(x_1) = m_2 + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} (x_1 - m_1), \quad \Gamma^* = \Gamma_{22} - \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}.$$

Для произвольной функции $y(x)$ в силу (3) и (П.1)

$$(П.3) \quad \int_T y(x) N_x\{m, \Gamma\} dx = \int_{\hat{T}} N_{x_1}\{m_1, \Gamma_1\} \int_{E_{k_2}} y(x) N_{x_2}\{m^*(x_1), \Gamma^*\} dx_2 dx_1.$$

Полагая в (П.3) $y(x) = 1$, нетрудно установить, что интеграл P , заданный в соответствии с (4), действительно может быть вычислен в силу (4), (5).

Представим заданный в силу (1) интеграл S в виде

$$(П.4) \quad S = \|S_1^T, S_2^T\|^T, \quad S_1 = \int_T x_1 N_x\{m, \Gamma\} dx, \quad S_2 = \int_T x_2 N_x\{m, \Gamma\} dx.$$

Полагая в (П.3) сначала $y(x) = x_1$, а затем $y(x) = x_2$, можно получить с учетом (П.2)

$$(П.5) \quad S_1 = \hat{S}, \quad S_2 = \hat{P} m_2 + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} (\hat{S} - \hat{P} m_1),$$

где $\hat{P}, \hat{S}$ заданы формулами (5). Вместе с (П.4) выражения (П.5) позволяют заключить, что S действительно может быть вычислен в силу (4), (5).

Представим заданный в силу (1) интеграл Q в виде

$$(П.6) \quad Q = Q^* + (m - \Lambda) (S - P m)^T + (S - P m) (m - \Lambda)^T + P (m - \Lambda) (m - \Lambda)^T,$$

где

$$Q = \int_T (x - m) (x - m)^T N_x\{m, \Gamma\} dx.$$

В соответствии с (2) Q^* можно разбить на блоки

$$(П.7) \quad Q^* = \begin{vmatrix} Q_{11}^* & Q_{12}^* \\ Q_{12}^{*T} & Q_{22}^* \end{vmatrix}, \quad Q_{ij}^* = \int_T (x_i - m_i) (x_j - m_j)^T N_x\{m, \Gamma\} dx \quad (i, j = 1, 2).$$

Полагая в (П.3) $y(x) = (x_i - m_i) (x_j - m_j)^T$, с учетом (П.2) находим

$$(П.8) \quad Q_{11}^* = \hat{Q}, \quad Q_{12}^* = \hat{Q} \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}, \\ Q_{22}^* = \hat{P} (\Gamma_{22} - \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}) + \Gamma_{12}^T \Gamma_{11}^{-1} \hat{Q} \Gamma_{11}^{-1} \Gamma_{12}$$

где $\hat{P}, \hat{S}, \hat{Q}$ заданы формулами (5), (9).

Подставляя (П.7), (П.8) в (П.6), убеждаемся в силу (2), (П.4), (П.5), что Q действительно удовлетворяет (4).

Лемма доказана.

Доказательство леммы 3. Воспользуемся обозначениями, принятыми для леммы в разделе 2. Применяя замену переменных (11), приводящую гауссовскую плотность вероятности $N_x\{m, \Gamma\}$ к стандартному виду [3], получаем для произвольной функции $y(x)$ тождество

$$\begin{aligned} & \int_T y(x) N_x\{m, \Gamma\} dx = \\ (П.9) \quad & = \frac{1}{\pi} \int_T y([m_1 + \sigma_1(\sqrt{1+\rho} x_1 - \sqrt{1-\rho} x_2)], [m_2 + \sigma_2(\sqrt{1+\rho} x_1 + \sqrt{1-\rho} x_2)]) e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

В силу формулы интегрирования по частям для двукратных интегралов [6]

$$(П.10) \quad \int_{\bar{T}} \frac{\partial u}{\partial x_1} v dx_1 dx_2 = \sum_{i=1}^N J_i - \int_{\bar{T}} u \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2,$$

где

$$(П.11) \quad J_i = \begin{cases} \beta_i \int_{\bar{x}_1^i}^{\bar{x}_1^{i+1}} u(x_1, \alpha_i + \beta_i x_1) v(x_1, \alpha_i + \beta_i x_1) dx_1 & \text{при } \bar{x}_1^i \neq \bar{x}_1^{i+1}, \\ \int_{\bar{x}_2^i}^{\bar{x}_2^{i+1}} u(\bar{x}_1^i, x_2) v(\bar{x}_1^i, x_2) dx_2 & \text{при } \bar{x}_1^i = \bar{x}_1^{i+1}, \end{cases}$$

а произвольные $u(x_1, x_2)$, $v(x_1, x_2)$ непрерывны на $\bar{T}$ вместе с производными $\partial u / \partial x_1$, $\partial v / \partial x_1$.

При $y(x) = 1$ из (П.9) с учетом (1) немедленно следует (12).

При $y(x) = x$ из (П.9) согласно (1), (10), (13) получаем формулы (14), (15), в которых

$$C_1 = \frac{1}{\pi} \int_T x_1 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, \quad C_2 = \frac{1}{\pi} \int_{\bar{T}} x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2.$$

Полагая $u = -(1/2\pi) \exp\{-(x_1^2 + x_2^2)\}$, $v = 1$, с помощью (П.10), (П.11) убеждаемся, что C_1 может быть вычислен в силу (19).

Интеграл C_2 приводится к интегралу вида C_1 заменой переменных $z_1 = x_2$, $z_2 = x_1$. Поэтому установить справедливость (19) для C_2 не составляет труда.

В соответствии с (10), (13) компоненты заданного в силу (1) интеграла Q имеют вид

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \int_T (x_1 - m_1)^2 N_x\{m, \Gamma\} dx, & Q_{22} &= \int_{\bar{T}} (x_2 - m_2)^2 N_x\{m, \Gamma\} dx, \\ Q_{12} &= \int_T (x_1 - m_1)(x_2 - m_2) N_x\{m, \Gamma\} dx. \end{aligned}$$

Полагая в (П.9) последовательно $y(x) = (x_1 - m_1)^2$, $y(x) = (x_1 - m_1)(x_2 - m_2)$, $y(x) = (x_2 - m_2)^2$, получаем соответственно формулы (16)–(18), в которых

$$\begin{aligned} q_{11} &= \int_{\bar{T}} x_1^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, & q_{12} &= \int_{\bar{T}} x_1 x_2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2, \\ q_{22} &= \int_{\bar{T}} x_2^2 e^{-(x_1^2 + x_2^2)} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Принимая $u = -0,5 \exp\{-(x_1^2 + x_2^2)\}$, $v = x_1$, с помощью (П.10), (П.11) приходим к (20) для q_{11} .

Аналогично при $u = -0,5 \exp\{-(x_1^2 + x_2^2)\}$, $v = x_2$ убеждаемся, что q_{12} может быть вычислен в силу (20).

Интеграл q_{22} сводится к интегралу q_{11} заменой переменных $z_1 = x_2$, $z_2 = x_1$. Поэтому установить справедливость (20) для q_{22} не составляет труда.

Лемма доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесса А. Е. Рекуррентные алгоритмы фильтрации для некоторых систем с нелинейностями кусочно-линейного типа. — *АиТ*, 1986, № 4, с. 48–55.
2. Илюшина Г. А., Романовский И. В. Вероятность попадания случайной точки в n -угольник. — В кн.: *Алгол-процедуры*. Л.: Вычислительный центр ЛГУ, 1970, вып. 4, с. 10–11.
3. Справочник по специальным функциям/Под ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979.
4. Леондес К. Т. Фильтрация и стохастическое управление в динамических системах. М.: Мир, 1980.
5. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1981.
6. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. II. М.: Наука, 1981.

Поступила в редакцию
26.IV.1985

SOME APPLIED ASPECTS IN RECURRENT PIECEWISE-LINEAR FILTERING

KOLESSA A. Ye.

Cases of piecewise-linear filtering are considered where the multi-dimensional integrals of the Gaussian probability density in the filtering formulae are computed. A technique is proposed for approximate solution of the nonlinear filtering problem and an example is provided.