ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

РАДИОФИЗИКА

Том XIX

ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК

ИЗДАНИЕ ГОРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО
РАДИОФИЗИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
1976

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

Том XIX, № 4 *РАДИОФИЗИКА* *1976*

УДК 514 : 538.56

ОЦЕНКА НЕКОТОРЫХ ТИПИЧНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ, ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ В РАДИОФИЗИКЕ

В. И. Классен

На основе классического метода ван дер Корпута доказаны теоремы, позволяющие оценивать широкий класс тригонометрических сумм и соответствующих им интегралов.

ВВЕДЕНИЕ

В радиофизической практике часто встречаются следующие математические объекты:

$$\int_a^b A(x)\, e^{2\pi i f(x)}\, dx \tag{1}$$

и

$$\sum_{a<n<b} A(n)\, e^{2\pi i f(n)}, \tag{2}$$

где $A(x)$ — медленноменяющаяся функция амплитудного распределения, $0 \leqslant A(x) \leqslant M$ $(x \in [a, b])$, а $f(x)$ — фазовая функция системы.

На определенной стадии исследования нет необходимости знать детально характер изменения этих величин, а достаточно иметь представление об огибающих. Они могут характеризоваться функциями оценки для (1) и (2).

Замкнутые инженерные оценки как для интегралов (1), так и для сумм (2) при различных условиях, налагаемых на функции $A(x)$ и $f(x)$, могут быть получены, если воспользоваться методом ван дер Корпута [1, 2], основанном, грубо говоря, на замене суммы (2) интегралом, и последующей оценкой этого интеграла. Такой подход был развит ван дер Корпутом и Титчмаршем [3], однако они интересовались порядком роста сумм. Нас же будет интересовать точная оценка, необходимая для инженерной практики.

1. ЗАМЕНА СУММЫ ИНТЕГРАЛОМ

Воспользовавшись формулой Сонина [4], справедливой для дважды дифференцируемых на отрезке функций, получим

$$\sum_{n=1}^{N} F(n) = \int_0^N F(x)\, dx + \frac{1}{2}[F(N) - F(0)] - \int_0^N \rho(x) F'(x)\, dx, \tag{3}$$

где $\rho(x) = \frac{1}{2} - \{x\}$, $\{x\}$ — дробная часть x.

Кроме того, в дальнейшем нам понадобится разложение

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu\pi x}{\nu}, \tag{4}$$

справедливое для любого нецелого x, причем ряд сходится почти всюду и его частичные суммы ограничены, так что можно умножать (4) на интегрируемую функцию и интегрировать почленно.

Считая, что $F(x) = A(x)\, e^{2\pi i f(x)}$ — дважды дифференцируемая на отрезке функция, мы оценим интегралы в правой части (3) и получим, таким образом, одновременно оценки (1) и (2).

2. ОЦЕНКИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА $I = \int\limits_0^N A(x)\, e^{2\pi i f(x)}\, dx$

Лемма 1. Если $f(x) \in C_1[0, N]$ удовлетворяет условию $f'(x) \geqslant r > 0$ и монотонна, то

$$\left| \int\limits_0^N e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi r}. \tag{5}$$

Доказательство:

$$\left| \int\limits_0^N e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| = \left\{ \left[\int\limits_0^N \cos 2\pi f(x)\, dx \right]^2 + \left[\int\limits_0^N \sin 2\pi f(x)\, dx \right]^2 \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим $I_1 = \int\limits_0^N \cos 2\pi f(x)\, dx$. Так как $f'(x)$ монотонно возрастает, то основной вклад в интеграл вносит первая полуволна; сумма второй с третьей, четвертой с пятой и т. д. даст только уменьшение интеграла. Но если $f'(x) \geqslant r > 0$, то минимально возможное изменение функции $f(x)$ на $[0, N]$ есть $[\Delta f(x)]_{\min} = Nr$, а на любом отрезке длины L — $[\Delta f(x)]_{\min} = Lr$. Изменение функции $f(x)$, определяющее первую половину полуволны, есть $\Delta f(x) = 1/2$. Отсюда максимально возможная ширина первой полуволны $L_{\max} = 1/2r$ и, следовательно,

$$| I_1 | \leqslant \left| \int\limits_0^{L_{\max}} \sin \frac{\pi}{L_{\max}} x\, dx \right| = \frac{1}{\pi r},$$

откуда следует утверждение леммы.

Лемма 2. (*А*). Если $f(x) \in C_2[0, N]$, $f''(x) \geqslant r > 0$ (или $\leqslant -r < 0$), то

$$\left| \int\limits_0^N e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqslant \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{2}{\pi} \sqrt{\dfrac{2}{r}}, \text{ если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \dfrac{4}{\pi} \sqrt{\dfrac{2}{r}}, \text{ если } f'(x) \text{ не знакопостоянна} \end{array} \right\}. \tag{6}$$

(*Б*). Если $f''(x) = r > 0$ (или $= -r < 0$), то

$$\left| \int\limits_0^N e^{2\pi i f(x)}\, dx \right| \leqslant \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{2r}}, & \text{если } \operatorname{sgn} f'(0) = \operatorname{sgn} f''(x) \\ \sqrt{\dfrac{2}{r}}, & \text{если } \operatorname{sgn} f'(0) \neq \operatorname{sgn} f''(x) \end{array} \right\}. \tag{7}$$

(*В*). Если выполняются условия (*А*), то

$$\left|\int_0^N e^{2\pi i f(x)}\,dx\right| \sim \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{2\sqrt{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \dfrac{1}{\sqrt{r}}, & \text{если } f'(x) \text{ обращается в нуль в одной точке} \end{array}\right\}. \tag{8}$$

Доказательство.

(*А*). Рассуждая аналогично лемме 1, мы придем к необходимости оценивать минимум возможного изменения функции $f(x)$ на любом промежутке длины L:

$$[\Delta f(x)]_{\min} = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{r}{2}L^2, & \text{если } f'(x) \text{ знакопостоянна} \\ \dfrac{r}{8}L^2, & \text{если } f'(x) \text{ не знакопостоянна} \end{array}\right\}.$$

Из последнего равенства следует неравенство (6).

(*Б*). Чтобы доказать (7), достаточно оценить интеграл

$$|I| = \left|\int_0^N \exp\left[i(\alpha x^2 + \beta x)\right] dx\right| =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2|\alpha|}}\left\{\left[C\left[\sqrt{|\alpha|}\left(N+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right] - C\left[\sqrt{|\alpha|}\,\frac{\beta}{2\alpha}\right]\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[S\left[\sqrt{|\alpha|}\left(N+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right] - S\left[\sqrt{|\alpha|}\,\frac{\beta}{2\alpha}\right]\right]^2\right\}^{1/2}.$$

Учитывая, что максимальное значение интегралов Френеля [5] $C_{\max}(x) \approx 0{,}75$, $S_{\max}(x) \approx 0{,}7$, получим

$$|I| \leqslant \left\{\begin{array}{ll} \sqrt{\dfrac{\pi}{2|\alpha|}}, & \text{если } \operatorname{sgn}\alpha = \operatorname{sgn}\beta \\ \sqrt{\dfrac{2\pi}{|\alpha|}}, & \text{если } \operatorname{sgn}\alpha = -\operatorname{sgn}\beta \end{array}\right\},$$

откуда следует (7).

(*В*). Формула (8) следует из метода стационарной фазы [6].

Оценки, стоящие в правых частях (6), (7) и (8), условимся обозначать функцией $Q(r)$.

На практике может быть полезна и следующая лемма.

Лемма 3. Пусть $A(x)$ — дважды дифференцируемая на $[0, N]$ функция, $A(0) = A(N) = 0$, $|A'(0)| = |A'(N)| = \eta$ и $|A''(x)| \leqslant r$. Тогда

$$\left|\int_0^N A(x)\, e^{i\alpha x}\, dx\right| \leqslant \frac{1}{\alpha^2}(2\eta + rN). \tag{9}$$

Доказательство. Интегрируя два раза по частям интеграл в (9) и оценивая полученное выражение по модулю, получаем утверждение леммы.

3. ВСПОМОГАТЕЛЬНАЯ ЛЕММА

Лемма 4. Пусть $f(x)$ — действительная дифференцируемая на $[0, N]$ функция с монотонной производной, $f'(0) = \alpha$, $f'(N) = \beta$. Тогда

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant 1+\left|\sum_{\beta-1<k<\alpha+\varepsilon} \int_{0}^{N} e^{2\pi i\{f(x)-kx\}}\, dx\right|+\frac{1+\ln(\alpha-\beta+1)}{\pi}+$$
$$+\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\left[C+\Psi(\alpha-\beta+2)\right]. \qquad (10)$$

Доказательство. Воспользовавшись формулой Сонина, получим

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant 1+\left|\int_{0}^{N} e^{2\pi i f(x)}\, dx\right|+|I|,$$

где, как нетрудно показать,

$$I=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left\{\int_{0}^{N}\frac{f'(x)}{f'(x)-k}\, de^{2\pi i\{f(x)-kx\}}-\int_{0}^{N}\frac{f'(x)}{f'(x)+k}\, de^{2\pi i\{f(x)+kx\}}\right\}.$$

Предположим, что $f'(x)$ монотонно убывает и, дополнительно, что $0<\beta\leqslant 1$ (потом мы избавимся от этого условия). Функции $\dfrac{f'(x)}{f'(x)+k}$ $(k=1,2,\ldots)$ положительны и монотонно убывают. Следовательно, можно применить вторую теорему о среднем к действительной и мнимой частям интеграла [5]:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left|\int_{0}^{N}\frac{f'(x)}{f'(x)+k}\, de^{2\pi i\{f(x)+kx\}}\right| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{k(k+\alpha)}.$$

Вторую сумму интегралов разобьем следующим образом:

$$\sum_{1\leqslant k<\alpha+\varepsilon}+\sum_{k\geqslant\alpha+\varepsilon},$$

где $1>\varepsilon>0$. Функции $\dfrac{f'(x)}{k-f'(x)}$ при $k\geqslant\alpha+\varepsilon$ положительны и монотонно убывают; следовательно, можно применить для оценки интегралов вторую теорему о среднем. В итоге для начальной суммы получаем:

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant 1+\left|\sum_{\beta-1<k<\alpha+\varepsilon}\int_{0}^{N} e^{2\pi i\{f(x)-kx\}}\, dx\right|+$$
$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{k(k+\alpha)}+\frac{1}{\pi}\sum_{1<k<\alpha+\varepsilon}\frac{1}{k}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k\geqslant\alpha+\varepsilon}\frac{\alpha}{k(k-\alpha)}.$$

Важно по возможности точнее оценить эти суммы. Пользуясь формулой 8.361 (7) из [7], получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha}{k(k+\alpha)}=\int_{0}^{1}\frac{1-x^{\alpha}}{1-x}\, dx=\Psi(\alpha+1)+C,$$

где $\Psi(x)=\dfrac{d}{dx}\ln\Gamma(x)$ — пси-функция, а $C=0{,}577\ldots$ — Эйлерова постоянная;

$$\sum_{1<k<\alpha+\varepsilon}\frac{1}{k}\leqslant 1+\ln\alpha.$$

Последняя сумма оценивается аналогично первой. Учитывая, что $\alpha\leqslant\alpha-\beta+1$, получаем (10).

Начальное предположение, что $0 < \beta \leqslant 1$, несущественно. Действительно, пусть оно не выполняется. Всегда можно выбрать функцию $\eta(x) = f(x) - \nu x$, такую, что $0 < \beta - \nu \leqslant 1$. Но оценка остается и для этой функции той же, т. е. добавки типа νx к функции, стоящей в экспоненте, не влияют на оценку.

4. ОЦЕНКИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ СУММ

Здесь мы приведем две теоремы, охватывающие большое число практически встречающихся в радиофизике типов сумм (2).

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — действительная функция с непрерывной и монотонной производной на отрезке $[0, N]$ и пусть $f'(0) = \alpha$, $f'(N) = \beta$, а также $|f'(x)| \leqslant \theta < 1$. Тогда

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant \left|\int_0^N e^{2\pi i f(x)}\,dx\right| + 1 + \sqrt{2}\left\{\left|\frac{1}{\pi\alpha} - \operatorname{ctg}\pi\alpha\right| + \left|\frac{1}{\pi\beta} - \operatorname{ctg}\pi\beta\right|\right\} \tag{11}$$

(теорема о замене тригонометрической суммы интегралом).

В доказательстве, аналогичном доказательству леммы 4, учтено, что

$$\operatorname{ctg}\pi x = \frac{1}{\pi x} + \frac{2x}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x^2 - k^2}.$$

Теорема 2. Пусть $f(x)$ — дважды дифференцируемая функция и $0 < r \leqslant f''(x) \leqslant hr$ или $0 < r \leqslant -f''(x) \leqslant hr$. Тогда имеет место оценка

$$\left|\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i f(n)}\right| \leqslant 1 + (1 + hrN)\,Q(r) + \frac{1 + \ln(1 + hrN)}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi}[C + \Psi(2 + hrN)], \tag{12}$$

где $Q(r)$ определяется леммой 2.

Теорема следует непосредственно из леммы 4 и леммы 2, если учесть, что $(\alpha - \beta) \leqslant hrN$.

5. ПРИМЕРЫ ОЦЕНОК

1) Дадим верхнюю оценку зависимости поля от радиуса сфокусированной в зоне Френеля плоской фазируемой антенной решетки, у которой расстояние между излучателями превышает длину волны. Как показано в [8], эта зависимость в направлении $\theta = \theta_0 = 0$ имеет вид

$$|M_0(R, R_0)| = \frac{1}{(2N+1)^2}\left|\sum_{n=-N}^{N}\exp\left[ik\frac{n^2 d^2}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)\right]\right|^2.$$

Оценка для $d = 5\lambda$, $R_0 = 400\lambda$, $(2N+1)^2 = 441$, полученная на основе теоремы 1, показана на рис. 1 пунктиром.

2) Известно [9], что оценка диаграмм направленности дуговых антенных решеток (ДАР) с раскрывом $N\alpha < \pi$ затруднена, однако теорема 2 позволяет получить такую оценку.

В обозначениях [9] диаграмма направленности ДАР в вертикальной плоскости при фазировании в направлении $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\varphi_0 = 0$ может быть записана в виде

$$F(z) = 2 \sum_{n=1}^{N/2} e^{iz \cos n\alpha},$$

где α — угловое расстояние между изотропными излучателями, $z = kR(1 - \sin\theta)$, $k = 2\pi/\lambda$, R — радиус дуги. Пример оценки для $N\alpha = \pi/2$, $N = 100$ приведен на рис. 2.

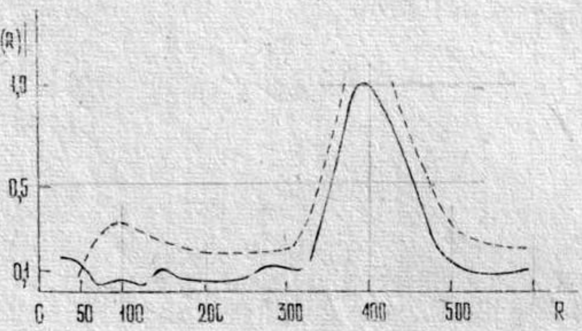

Рис. 1.

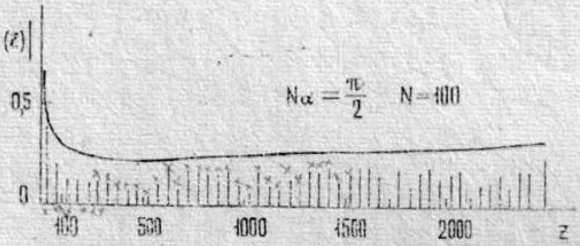

Рис. 2.

Доказанные в статье теоремы дают возможность эффективно оценивать широкий класс тригонометрических сумм и могут быть использованы, по-видимому, в различных областях радиофизики. Аналогичные оценки могут быть получены и для случая, когда $A(n) \not\equiv 1$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В. В. Меркулову за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. G. Van der Corput, Math. Ann., **84**, 53 (1921).
2. J. G. Van der Corput, Math. Ann., **98**, 697 (1928).
3. Е. К. Титчмарш, Теория дзета-функции Римана, ИЛ, М., 1953.
4. И. М. Виноградов, Основы теории чисел, изд. Наука, М., 1972.
5. Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике, изд. Наука, М., 1972.
6. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, III (2), изд. Наука, М., 1974.
7. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, М., 1962.
8. В. И. Классен, В. В. Меркулов, Радиотехника и электроника, **20**, № 2, 312 (1975).
9. В. И. Классен, Тр. МФТИ, сер. Радиотехника и электроника, **7**, 124 (1974).

Поступила в редакцию
19 мая 1975 г.

ESTIMATION OF SOME TYPICAL TRIGONOMETRIC SUMS IN RADIO PHYSICS

V. I. Klassen

Based upon the classical Van-der-Korput method, the theorems are proved which permit a wide class of trigonometric sums and corresponding integrals to be estimated.