

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА И ТЕЛЕМЕХАНИКА

(отдельный оттиск)

8

МОСКВА • 1976

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО МНОГОМЕРНОГО ФИЛЬТРА

А. Е. КОЛЕССА

(Москва)

Рассматривается задача фильтрации частично наблюдаемой последовательности, подчиняющейся нелинейным по ненаблюдаемой компоненте рекуррентным уравнениям. Находится верхняя грань следа ковариационной матрицы ошибок фильтра калмановской структуры с детерминированным коэффициентом усиления. Показывается, что при определенных условиях ошибка фильтрации стремится к нулю с увеличением времени. Отыскивается оптимальный в смысле минимума верхней грани среднеквадратической ошибки фильтрации коэффициент усиления фильтра.

1. Введение

Решение задачи оптимальной фильтрации частично наблюдаемых гауссовско-марковских последовательностей представлено Калманом в [1].

Результаты по нелинейной оптимальной фильтрации условно-гауссовских последовательностей приведены в [2].

В случае произвольной последовательности, не принадлежащей к указанным выше классам, можно воспользоваться приближенными методами, многие из которых приводят к фильтру калмановской структуры. Например, широко известен метод построения фильтра Калмана для линеаризованной нелинейной системы, а также метод оценки по первым двум моментам [3]. Оба метода приводят к фильтру калмановской структуры, но вид коэффициента усиления фильтра оказывается при этом, вообще говоря, не одним и тем же.

Наряду с синтезом фильтра важной задачей является определение ошибки фильтрации. Так, в [4] для случая непрерывного времени при некоторых ограничениях найдена верхняя грань $P(t)$ для ковариационной матрицы ошибок фильтра калмановской структуры с произвольным детерминированным коэффициентом.

Элементы матрицы $P(t)$ и ее след $\text{sp}\{P(t)\}$ показывают верхнюю границу точности «отслеживания» фильтром ненаблюдаемой компоненты. При этом возникает важный для приложений вопрос об условиях, при которых последовательности $P(t)$, $t=0, 1, \dots$, $\text{sp}\{P(t)\}$, $t=0, 1, \dots$ стабилизируются при $t \rightarrow \infty$.

Во многих практических задачах ненаблюдаемая компонента может быть описана детерминированным рекуррентным уравнением со случайным начальным условием. В настоящей работе показывается, что в этом частном случае удастся при определенных условиях не только найти некоторую верхнюю грань $\bar{\Delta}_t$ следа ковариационной матрицы ошибок фильтра калмановской структуры с произвольным детерминированным коэффициентом усиления $K(t)$, но и выбрать последний так, чтобы $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_t = 0$, что гарантирует сходимость в среднеквадратическом смысле оценки $\hat{\theta}_t$ к значе-

нию θ_i ненаблюдаемой компоненты. Кроме того, удастся определить оптимальную в смысле минимума $\bar{\Delta}_i$ последовательность коэффициентов $K(t)$, $t=0, 1, \dots$ с частично заданной структурой.

2. Постановка задачи

Рассматривается $(k+k)$ -мерная случайная последовательность $\{\theta_i, \xi_i\}$, $t=0, 1, \dots$, подчиняющаяся рекуррентным соотношениям

$$(1) \quad \theta_{i+1} = f(\theta_i, t), \quad \xi_{i+1} = h(\theta_i, t) + G(t) \varepsilon(t+1),$$

где $G(t) = \|G_{ij}(t)\|$ — матрица порядка $k \times k$, а $\varepsilon(t) = [\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_k(t)]$ — последовательность независимых случайных векторов с независимыми компонентами, причем

(2)

$$M\{\varepsilon(t)\} = 0, \quad M\{\varepsilon(t) \varepsilon^T(t)\} = E, \quad W(t) \triangleq G(t) G^T(t), \quad \text{sp}\{W(t)\} \leq C_1 < \infty.$$

Считается, что случайная величина θ_0 , первые два момента m_0 и Γ_0 которой известны, не зависят от $\varepsilon(t)$.

Предполагается, что нелинейные, вообще говоря, функции $f(x, t)$, $h(x, t)$ удовлетворяют условиям

$$(3) \quad f(x + \Delta x, t) - f(x, t) = A(t) \Delta x + g_1(\Delta x, x, t),$$

$$(4) \quad h(x + \Delta x, t) - h(x, t) = B(t) \Delta x + g_2(\Delta x, x, t),$$

причем

$$(5) \quad \|g_1(\Delta x, x, t)\| \leq a(t) \|\Delta x\|, \quad \|g_2(\Delta x, x, t)\| \leq b(t) \|\Delta x\|,$$

где $\|x\| = \sqrt{x^T x}$ — норма вектора x , $A(t) = \|A_{ij}(t)\|$, $B(t) = \|B_{ij}(t)\|$ — матрицы порядка $k \times k$ и $k \times k$ соответственно, а $a(t)$ и $b(t)$ — скалярные коэффициенты.

Известно [1, 3], что если $g_1(\Delta x, x, t) = g_2(\Delta x, x, t) \equiv 0$, а $\varepsilon(t)$ — последовательность независимых векторов, то линейная оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка $\hat{\theta}_i$ ненаблюдаемой компоненты θ_i по реализациям $\xi_0^i = \{\xi_0, \dots, \xi_i\}$ второй компоненты задается вместе с ковариационной матрицей $\Gamma_i = M\{(\theta_i - \hat{\theta}_i)(\theta_i - \hat{\theta}_i)^T\}$ ошибок оценки рекуррентными соотношениями фильтра Калмана

$$(6) \quad \hat{\theta}_{i+1} = A(t) \hat{\theta}_i + K_L(t) [\xi_{i+1} - B(t) \hat{\theta}_i], \quad K_L(t) = A(t) \Gamma_i B^T(t) [W(t) + B(t) \Gamma_i B^T(t)]^{-1},$$

$$(7) \quad \Gamma_{i+1} = A(t) \Gamma_i A^T(t) - K_L(t) B(t) \Gamma_i A^T(t), \quad \hat{\theta}_0 = m_0, \quad \Gamma_{i=0} = \Gamma_0.$$

В случае нелинейных уравнений (1) многие приближенные методы приводят, как уже указывалось, к фильтру калмановской структуры

$$(8) \quad \hat{\theta}_{i+1} = f(\hat{\theta}_i, t) + K(t) [\xi_{i+1} - h(\hat{\theta}_i, t)], \quad \hat{\theta}_0 = m_0.$$

При этом вид коэффициента $K(t)$ меняется от метода к методу, а найти оптимальный в среднеквадратическом смысле $K(t)$, вообще говоря, не удастся.

Следует отметить определенную связь рассматриваемой задачи фильтрации с методом стохастической аппроксимации [5]. В самом деле, второе из уравнений (1) можно записать в виде

$$(9) \quad \xi_{i+1} = H(\theta_0, t) + G(t) \varepsilon(t+1),$$

где функция

$$H(\theta_0, t) = h(f(\dots f(\theta_0, t=0) \dots)), \quad t).$$

Тогда при известных условиях [5] рекуррентная процедура оценивания

$$(10) \quad \hat{\theta}_0(t+1) = \hat{\theta}_0(t) + \alpha_t [\xi_{t+1} - H(\hat{\theta}_0(t), t)], \quad \hat{\theta}_0(t=0) = m_0$$

вектора θ_0 , который можно задать соотношением

$$(11) \quad \theta_0(t+1) = \theta_0(t),$$

состоятельна в сильном смысле [5] для любой последовательности $\alpha_t \geq 0$, для которой

$$(12) \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t^2 < \infty.$$

Этот факт позволяет надеяться, что существуют условия, при которых алгоритм

$$(13) \quad \hat{\theta}_{t+1} = f(\hat{\theta}_t, t) + \alpha_t Q(t) [\xi_{t+1} - h(\hat{\theta}_t, t)], \quad \hat{\theta}_0 = m_0,$$

совпадающий с фильтром (8) при $K(t) = \alpha_t Q(t)$ ($Q(t)$ — некоторая матрица, приводящая компоненты вектора рассогласования $(\xi_{t+1} - h(\hat{\theta}_t, t))$ «в соответствие» компонентам вектора $f(\hat{\theta}_t, t)$), дает оценку $\hat{\theta}_t$, сходящуюся (в некотором смысле) к значению θ_t компоненты последовательности (1).

В настоящей работе находится верхняя грань $\bar{\Delta}_t$ для следа $\Delta_t = \text{sp}\{\Gamma_t\}$ ковариационной матрицы ошибок фильтра (8) с произвольным детерминированным коэффициентом. Затем показывается, что если аналогично (13) выбрать $K(t) = \alpha_t A(t) B^{-1}(t)$ (в предположении $\det B(t) \neq 0$), то при определенных условиях $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_t = 0$, откуда следует, что оценка $\hat{\theta}_t$ сходится к θ_t

в среднеквадратическом смысле. Кроме того, находится последовательность α_t^* , оптимальная в том смысле, что

$$\bar{\Delta}_t(\alpha_0^*, \dots, \alpha_{t-1}^*) = \inf_{\alpha_0, \dots, \alpha_{t-1}} \bar{\Delta}_t(\alpha_0, \dots, \alpha_{t-1}), \quad t=0, 1, \dots$$

3. Основные результаты

Результаты работы можно сформулировать в виде следующих теорем.

Теорема 1. В предположениях (3), (4)

$$(14) \quad \begin{aligned} \Delta_{t+1} &\leq (\lambda_{\max}^{1/2} \{ (A(t) - K(t)B(t))^T (A(t) - K(t)B(t)) \} + \\ &+ a(t) + b(t) \sqrt{\text{sp}\{K^T(t)K(t)\}})^2 \Delta_t + \text{sp}\{K^T(t)K(t)W(t)\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее $\lambda_{\max}\{A\}$ — максимальное собственное число матрицы A . Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 [6]. Если $A \geq B$ — симметрические матрицы, то

$$\lambda_{\max}\{A\} \geq \lambda_{\max}\{B\}, \quad \text{sp}\{A\} \geq \text{sp}\{B\}.$$

Лемма 2 [6]. Для произвольных матриц A и B

$$\lambda_{\max}^{1/2} \{ (A+B)^T (A+B) \} \leq \lambda_{\max}^{1/2} \{ A^T A \} + \lambda_{\max}^{1/2} \{ B^T B \}.$$

Лемма 3. Для произвольного вектора $x \neq 0$

$$\lambda_{\max} \left\{ \frac{xx^T}{x^T x} \right\} = 1.$$

Утверждение леммы 3 является следствием того факта, что матрица $xx^T/x^T x$ идемпотентная [6] и ранг ее отличен от нуля.

Лемма 4. Если A и B — действительные симметрические неотрицательно определенные матрицы, то

$$\operatorname{sp}\{AB\} \leq \lambda_{\max}\{A\} \operatorname{sp}\{B\}.$$

В самом деле, так как матрица $A' = A + \varepsilon E$ ($\varepsilon > 0$) — положительно определенная, то A и B одновременно могут быть приведены к диагональному виду [6]. Тогда, как легко видеть,

$$\operatorname{sp}\{AB\} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{sp}\{A'B\} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_{\max}\{A + \varepsilon E\} \operatorname{sp}\{B\} = \lambda_{\max}\{A\} \operatorname{sp}\{B\}.$$

Доказательство теоремы 1. Из (4) и (8) с учетом независимости $\varepsilon(t)$ и θ_0 получаем

$$(15) \quad M\{\tilde{\theta}_{t+1} \tilde{\theta}_{t+1}^T\} = M\{(\tilde{f}_t - K(t)\tilde{h}_t)(\tilde{f}_t - K(t)\tilde{h}_t)^T\} + K(t)W(t)K^T(t),$$

где

$$(16) \quad \tilde{\theta}_t = \theta_t - \hat{\theta}_t, \quad \tilde{f}_t = f(\theta_t, t) - f(\hat{\theta}_t, t), \quad \tilde{h}_t = h(\theta_t, t) - h(\hat{\theta}_t, t).$$

Пусть $\tilde{\theta}_t \neq 0$. Тогда, используя (3) и (4), имеем

$$(17) \quad (\tilde{f}_t - K(t)\tilde{h}_t)(\tilde{f}_t - K(t)\tilde{h}_t)^T = ((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))\tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))^T,$$

где

$$(18) \quad R_1 = \frac{g_1(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t)\tilde{\theta}_t^T}{\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t}, \quad R_2 = \frac{g_2(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t)\tilde{\theta}_t^T}{\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t}.$$

Подставляя (17) в (15), на основании леммы 4 находим

$$(19) \quad M\{\operatorname{sp}\{\tilde{\theta}_{t+1}\tilde{\theta}_{t+1}^T\}\} \leq M\{\lambda_{\max}\{((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))^T \times \\ \times ((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))\} \operatorname{sp}\{\tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T\} + \operatorname{sp}\{K^T(t)K(t)W(t)\}\}.$$

В силу леммы 2

$$(20) \quad \lambda_{\max}^{1/2}\{((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))^T((A(t) - K(t)B(t)) + (R_1 - K(t)R_2))\} \leq \lambda_{\max}^{1/2}\{(A(t) - K(t)B(t))^T(A(t) - K(t)B(t))\} + \\ + \lambda_{\max}^{1/2}\{R_1^TR_1\} + \lambda_{\max}^{1/2}\{R_2^TK^T(t)K(t)R_2\}.$$

Учитывая (5) и (18), получаем

$$(21) \quad R_1^TR_1 = \frac{g_1^T(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t)g_1(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t)}{(\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t)^2} \tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T \leq a^2(t) \frac{\tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T}{\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t},$$

$$(22) \quad R_2^TK^T(t)K(t)R_2 = \frac{\tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T}{(\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t)^2} g_2^T(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t)K^T(t)K(t)g_2(\tilde{\theta}_t, \hat{\theta}_t, t) \leq \\ \leq b^2(t) \operatorname{sp}\{K(t)K^T(t)\} \frac{\tilde{\theta}_t\tilde{\theta}_t^T}{\tilde{\theta}_t^T\tilde{\theta}_t}.$$

Применяя теперь леммы 1 и 3 к (21) и (22), находим

$$(23) \quad \lambda_{\max}^{1/2}\{R_1^TR_1\} \leq a(t), \quad \lambda_{\max}^{1/2}\{R_2^TK^T(t)K(t)R_2\} \leq b(t)\sqrt{\operatorname{sp}\{K^T(t)K(t)\}}.$$

Подставляя (20) в (19), учитывая (23) и замечая, что выражение $(\lambda_{\max}^{1/2}\{(A(t) - K(t)B(t))^T(A(t) - K(t)B(t))\} + a(t) + b(t)\sqrt{\operatorname{sp}\{K^T(t)K(t)\}})$ не зависит от θ_0 , ξ_0^t , получаем неравенство (14).

Пусть теперь $\theta_t = 0$; тогда из (16) следует, что одновременно обращается в нуль и первое слагаемое в правой части (15), т. е. и в этом случае неравенство (14) справедливо. Теорема доказана.

Замечание 1. Полагая в (14) $K(t) = \alpha_t A(t) B^{-1}(t)$, с помощью леммы 4 получаем

$$(24) \quad \Delta_{t+1} \leq (|1 - \alpha_t| \Lambda_1^{1/2} + a(t) + \alpha_t b(t) \Lambda_1^{1/2} L_t^{1/2})^2 \Delta_t + \alpha_t^2 d_t,$$

где

$$(25) \quad \Lambda_1 = \lambda_{\max} \{A^T(t) A(t)\}, \quad \Lambda_2 = \lambda_{\max} \{W(t)\}, \quad L_t = \text{sp} \{(B^T(t) B(t))^{-1}\}, \\ d_t = \Lambda_1 \Lambda_2 L_t.$$

Замечание 2. В силу (12) для достаточно больших t и $e(t) \stackrel{\Delta}{=} a(t) + \Lambda_1^{1/2} \neq 0$ можно представить (24) в виде

$$(26) \quad \Delta_{t+1} \leq e(t) (1 - \alpha_t c_t)^2 \Delta_t + \alpha_t^2 d_t,$$

где

$$(27) \quad c_t = \frac{\Lambda_1^{1/2}}{e(t)} (1 - b(t) L_t^{1/2}).$$

Если же $e(t)$ обращается в нуль, то одновременно обращается в нуль и правая часть (26).

Теорема 2. Пусть выполняются условия (3), (4) и (12). Тогда, если

$$(28) \quad \sum_{t=0}^{\infty} \alpha_t c_t = \infty,$$

$$(29) \quad e(t) \leq 1, \quad t=0, 1, \dots,$$

$$(30) \quad b(t) L_t^{1/2} \leq 1, \quad t=0, 1, \dots,$$

то оценка $\hat{\theta}_t$, задаваемая фильтром (8) с $K(t) = \alpha_t A(t) B^{-1}(t)$ ($\det B(t) \neq 0$), сходится к значению θ в среднеквадратическом смысле.

Для доказательства теоремы нам понадобится

Лемма 5 [7]. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ сходится и $a_n \nearrow$ монотонно возрастающая последовательность $a_n > 0$, $a_n \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n a_k z_k = 0.$$

Доказательство теоремы 2. Без ограничения общности рассмотрим случай $0 \leq \alpha_t \leq 1$, $t=0, 1, \dots$. Тогда из (26) с учетом (29) получаем

$$(31) \quad \Delta_t \leq \Phi_1(t) + \Phi_2(t),$$

где

$$(32) \quad \Phi_1(t) = \Delta_0 \prod_{i=0}^{t-1} (1 - \alpha_i c_i)^2, \quad \Phi_2(t) = \sum_{j=0}^{t-2} \alpha_j^2 d_j \prod_{i=j+1}^{t-1} (1 - \alpha_i c_i)^2 + \alpha_{t-1}^2 d_{t-1}.$$

В силу условий (28), (30), гарантирующих расхожимость к нулю бесконечного произведения $\prod_{i=0}^{\infty} (1 - \alpha_i c_i)$ [8], $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_1(t) = 0$.

Из (2) и (29) следует, что $d_t \leq C_2 < \infty$, $t=0, 1, \dots$. Предполагая $(1 - \alpha_i c_i) \neq 0$, $t=0, 1, \dots$ и обозначая $z_k = \alpha_k^2$, $a_k = \left(\prod_{i=0}^k (1 - \alpha_i c_i)^2 \right)^{-1}$, получаем

$$(33) \quad \Phi_2(t+1) \leq C_2 \frac{1}{a_t} \sum_{k=0}^t a_k z_k.$$

Тогда в силу (37) и леммы 5 $\Phi_2(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Если же $(1-\alpha_i c_i)$ обращается при некоторых i в нуль, то это (см. (32)) лишь ускоряет сходимость $\Phi_2(t)$ к нулю.

Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 2 остается в силе, если потребовать выполнения (30), по крайней мере начиная с некоторого $t=t_1$.

Замечание 4. Обозначая

$$(34) \quad \bar{a} = \sup_t a(t), \quad \bar{b} = \sup_t b(t), \quad \bar{\Lambda}_1 = \sup_t \Lambda_1,$$

$$\bar{\Lambda}_2 = \sup_t \Lambda_2, \quad \bar{L} = \sup_t L_t, \quad \bar{d} = \bar{\Lambda}_1 \bar{\Lambda}_2 \bar{L},$$

получаем из (24), что

$$(35) \quad \Delta_{t+1} \leq (|1-\alpha_t| \bar{\Lambda}_1^{-1/2} + \bar{a} + \alpha_t \bar{b} \sqrt{\bar{\Lambda}_1 \bar{L}})^2 \Delta_t + \alpha_t^2 \bar{d}.$$

Теорема 2'. Пусть выполняются условия (3), (4), (12), тогда если

$$(36) \quad \bar{a} + \bar{\Lambda}_1^{-1/2} \leq 1,$$

$$(37) \quad \bar{b} \bar{L}^{1/2} \leq (1+C_3)^{-1}, \quad 0 < C_3 < \infty,$$

то оценка $\hat{\theta}_t$, задаваемая фильтром (8) с $K(t) = \alpha_t A(t) B^{-1}(t)$, сходится к θ в среднеквадратическом смысле.

Доказательство теоремы 2' аналогично доказательству теоремы 2.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится

Лемма 6. Пусть последовательность $\bar{\Delta}_t = \bar{\Delta}_t(\bar{\Delta}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{t-1})$, $t=0, 1, \dots$ определяется рекуррентным уравнением

$$(38) \quad \bar{\Delta}_{t+1} = \Psi(\bar{\Delta}_t, \alpha_t), \quad \bar{\Delta}_0 = \Delta_0,$$

где

$$(39) \quad \Psi(\bar{\Delta}_t, \alpha_t) = (|1-\alpha_t| \Lambda_1^{-1/2} + a(t) + \alpha_t b(t) \sqrt{\Lambda_1 L_t})^2 \bar{\Delta}_t + \alpha_t^2 d_t,$$

а $\alpha_t \geq 0$, $t=0, 1, \dots$ — произвольная числовая последовательность. Тогда если

$$(40) \quad b(t) L_t^{1/2} \leq 1, \quad t=0, 1, \dots,$$

то для любого $t=0, 1, \dots$

$$(41) \quad \bar{\Delta}_{t+1}^* = \bar{\Delta}_{t+1}(\bar{\Delta}_0, \alpha_0^*, \dots, \alpha_t^*) = \inf_{\alpha_0, \dots, \alpha_t} \bar{\Delta}_{t+1}(\bar{\Delta}_0, \alpha_0, \dots, \alpha_t),$$

где последовательность α_t^* задается рекуррентными соотношениями

$$(42) \quad \inf_{\alpha_t} \Psi(\bar{\Delta}_t^*, \alpha_t) = \Psi(\bar{\Delta}_t^*, \alpha_t^*), \quad \bar{\Delta}_{t+1}^* = \Psi(\bar{\Delta}_t^*, \alpha_t^*), \quad \bar{\Delta}_0^* = \Delta_0.$$

Доказательство. Пусть $\Lambda_1 \neq 0$. Тогда можно показать, что функция $\Psi(\bar{\Delta}_t, \alpha)$ имеет единственный минимум в точке $\alpha = \alpha_{\min}$, причем

$$(43) \quad \alpha_{\min} = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_t) > 1, \\ \beta(\bar{\Delta}_t) & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_t) \leq 1, \end{cases}$$

где

$$(44) \quad \beta(\bar{\Delta}_t) = (1 + a(t) \Lambda_1^{-1/2}) (1 - b(t) L_t^{1/2}) / ((1 - b(t) L_t^{1/2}) + \Lambda_2 L_t / \bar{\Delta}_t)^{-1}.$$

Используя (43), с учетом (42) для произвольного $t=T$ получаем

$$(45) \quad \alpha_{T-1}^* = \alpha_{\min}(\bar{\Delta}_{T-1}^*) = \begin{cases} 1 & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_{T-1}^*) > 1, \\ \beta(\bar{\Delta}_{T-1}^*) & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_{T-1}^*) \leq 1. \end{cases}$$

Подставляя (45) в (42), находим

$$(46) \quad \bar{\Delta}_T^* = \Psi(\bar{\Delta}_{T-1}^*, \alpha_{T-1}^*) = \begin{cases} (a(t) + b(t) \sqrt{\Lambda_1 L_t})^2 \bar{\Delta}_{T-1}^* + \Lambda_1 \Lambda_2 L_t & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_{T-1}^*) > 1, \\ (a(t) + \Lambda_1^{1/2} \Lambda_2 L_t \left[(1 - b(t) L_t^{1/2})^2 + \frac{\Lambda_2 L_t}{\bar{\Delta}_{T-1}^*} \right]^{-1})^2 & \text{при } \beta(\bar{\Delta}_{T-1}^*) \leq 1. \end{cases}$$

Из (46) видно, что $\bar{\Delta}_T^*$ монотонна по $\bar{\Delta}_{T-1}^*$, и справедливость леммы при $\Lambda_1 \neq 0$ становится очевидной. Если же $\Lambda_1 = 0$, то из (39) следует, что $\Psi(\bar{\Delta}_t, \alpha_t) = 0$, т. е. в этом случае утверждение леммы сохраняет силу. Лемма доказана.

Замечание 5. Можно показать, что последовательность $\bar{\Delta}_t^*$, $t=0, 1, \dots$ невозрастающая.

Замечание 6. В силу (24) и леммы 6

$$\Delta_t \leq \bar{\Delta}_t^*, \quad t=0, 1, \dots$$

Теорема 3. Пусть выполняются условия (3), (4), (36), (37). Тогда для следа Δ_t ковариационной матрицы ошибок фильтра (8) с коэффициентом $K(t) = \alpha_t^* A(t) B^{-1}(t)$, где α_t^* определяется из (45), справедливо

$$(47) \quad \begin{aligned} \Delta_t &\leq \bar{\Delta}_t(\Delta_0, \alpha_0^*, \dots, \alpha_{t-1}^*) = \\ &= \inf_{\alpha_0, \dots, \alpha_{t-1}} \Delta_t(\Delta_0, \alpha_0, \dots, \alpha_{t-1}), \\ &\quad t=0, 1, \dots \end{aligned}$$

и

$$(48) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \Delta_t = 0.$$

Теорема 3 является следствием теоремы 2 и леммы 6.

4. Обсуждение результатов

Выясним смысл условий, при которых рассматриваемая оценка $\hat{\theta}_t$ сходится к θ в среднеквадратическом смысле.

В [4] функции, удовлетворяющие (3) или (4), называются функциями, «ограниченными конусом» (Con-bounded functions). Одномерный пример такой функции приведен на рис. 1.

Физический смысл ограничения (3) состоит в том, что отследить нелинейно изменяющуюся компоненту θ_t линейным по рассогласованию $\delta_t = \xi_{t+1} - h(\hat{\theta}_t, t)$ фильтром (8) можно, по-видимому, только в том случае, когда закон изменения θ_t в определенном смысле близок к линейному. Аналогичное ограничение (4) на функцию $h(x, t)$ носит скорее всего в основном технический характер.

Следует отметить, что (29) является в одномерном случае ($k=1$) не только одним из достаточных условий, но и необходимым условием того,

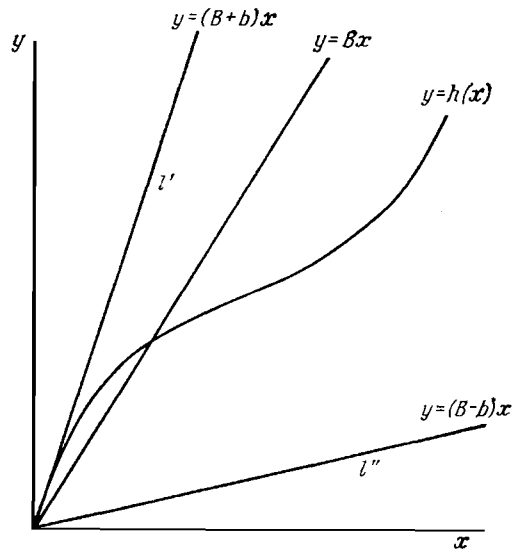


Рис. 1

что $\lim_t \Delta_t = 0$. В самом деле, пусть $k=1$ и

$$(49) \quad \theta_{t+1} = \theta_t + \rho \varphi(\theta_t, t), \quad \rho > 0, \quad \xi_{t+1} = \theta_t + G\varepsilon(t+1),$$

где $\varphi(x, t)$ — некоторая нелинейная, вообще говоря, функция x .

Выберем $\varphi(x, t)$ так, чтобы условия (3) и (4) для (49) выполнялись, а (29) нет. Положим для этого $\varphi(x, t) = x$. При этом, как легко проверить, дисперсия линейного оптимального для (49) фильтра Калмана не будет стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тем более это будет так для фильтра (8).

Условие (37) в одномерном случае гарантирует отсутствие у функции $h(x, t)$ участков с нулевой производной, т. е. прямая l'' (см. рис. 1) в этом случае имеет отличный от нуля наклон. Если же (37) не соблюдено, то при больших $|\hat{\theta}_t - \theta_t|$ тем не менее разность $\delta'_t = h(\theta_t, t) - h(\hat{\theta}_t, t)$ может быть близка к нулю и знак рассогласования δ_t за счет шума так часто не совпадает со знаком δ'_t , что фильтр перестает следить за изменениями θ_t . Аналогичный смысл и у пары условий (28), (30).

В заключение отметим, что если размерность l вектора ξ_t не равна размерности k вектора θ_t , то состоятельной оценки, вообще говоря, не существует. Выяснение условий ее существования и обобщение результатов работы на случай $k \neq l$ требует дальнейших исследований.

5. Пример

Пусть ордината y_0 точки A , лежащей на плоскости, известна, а абсцисса x_0 — случайная величина.

Требуется оценить x_0 по измерениям ξ_i угла γ (рис. 2), которые связаны с положением точки A нелинейными уравнениями

$$(50) \quad \xi_i = h(x_0) + G\varepsilon_i, \quad i=1, 2, \dots,$$

где

$$(51) \quad h(x_0) = \arctg \frac{x_0 - l}{y_0}, \quad *$$

а ε_i ($i=1, 2, \dots$) — последовательность независимых случайных величин, представляющих собой нормированные ошибки измерения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, причем x_0 и ε_i , $i=1, 2, \dots$ независимы.

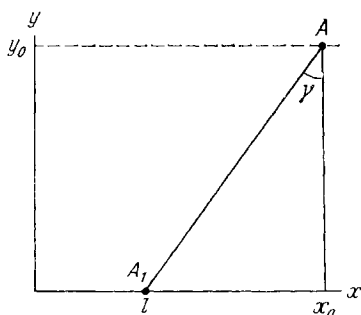


Рис. 2

Пусть также а priori известно, что x_0 принадлежит некоторому конечному интервалу (c, d) и распределена на нем равномерно. Тогда естественно вместо оценки (8) воспользоваться ее «усеченной» модификацией

$$(52) \quad \hat{x}_{i+1} = [\hat{x}_i + K_i(\xi_i - h(\hat{x}_i))]_c^d,$$

где для любого скалярного x введено обозначение

$$\hat{x}_0 = \frac{d+c}{2},$$

$$[x]_c^d = \begin{cases} x, & \text{если } c < x < d, \\ c, & \text{если } x \leq c, \\ d, & \text{если } x \geq d. \end{cases}$$

Легко проверить, что для такой оценки в формулировках теорем 1–3 можно не требовать, чтобы для функции $h(x)$, фигурирующей в рассматриваемом примере, ограничения (4), (5) выполнялись при любых x и Δx . В самом деле, это требование было необходимо только для того, чтобы имело место соотношение (17). Но для рассматриваемого примера в силу выбора оценки в виде (52) и того факта, что $x_0 \in (c, d)$, очевидно,

$$(53) \quad \hat{h} \triangleq h(x_0) - h(\hat{x}_i) = B(x_0 - \hat{x}_i) + g_2(x_0 - \hat{x}_i, \hat{x}_i),$$

* Координаты $(l, 0)$ точки A_1 (рис. 2) известны, $c \geq l$.

где

$$(54) \quad |g_2(x_0 - \hat{x}_i, \hat{x}_i)| \leq b |x_0 - \hat{x}_i|, \quad B = \frac{1}{2} [h'(d) + h'(c)],$$

$$b = \frac{1}{2} [h'(c) - h'(d)].$$

Поэтому соотношение (17) в данном случае также имеет место, хотя функция $h(x)$ удовлетворяет ограничениям (4), (5) только для таких x и Δx , для которых как x , так и $x + \Delta x$ принадлежат одному и тому же конечному интервалу. При этом, как следует из (54), параметры B , b зависят от координат концов этого интервала.

Рассмотрим для простоты случай

$$(55) \quad G^2/\Delta_0 \geq b(B-b),$$

где $\Delta_0 = (d-c)^2/12$ — априорная дисперсия случайной величины x_0 . Тогда в соответствии с теоремой 3 и замечанием 5, выбирая в процедуре (52) коэффициент K_i в виде

$$(56) \quad K_i = K_i^* = (B-b) \left[(B-b)^2 + \frac{G^2}{\Delta_i^*} \right]^{-1},$$

где

$$(57) \quad \bar{\Delta}_i^* = \left(\frac{1}{\Delta_0} + i \frac{(B-b)^2}{G^2} \right)^{-1}, \quad \bar{\Delta}_0^* = \Delta_0,$$

закключаем, что дисперсия $\Delta_i = M(x_0 - \hat{x}_i)^2$ ошибки оценки (52) величины x_0 удовлетворяет соотношению

$$\Delta_i \leq \bar{\Delta}_i^*$$

и стремится к нулю с увеличением числа измерений.

Автор считает своим долгом поблагодарить П. И. Кицула за участие в обсуждении полученных результатов.

Поступила в редакцию
23 мая 1975 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Kalman R. E. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. Trans. ASME, Ser. D, J. Basic Engng, v. 82, No. 1, pp. 35-45, March 1960.
2. Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Статистика случайных процессов, нелинейная фильтрация и смежные вопросы. «Наука», 1974.
3. Аоки М. Оптимизация стохастических систем. «Наука», 1971.
4. Gilman A. S., Rhodes L. B. Con-Bounded Nonlinearities and Mean-Square Bounds — Estimation Upper Bound. IEEE Trans. Automat. Control., v. AC-18, No. 3, pp. 280-285, June 1973.
5. Невельсон М. Б., Хасьминский Р. З. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание. «Наука», 1972.
6. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. «Наука», 1966.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов, т. 1. «Наука», 1971.
8. Ильин В. А., Поздняк Э. Г. Основы математического анализа, ч. 1. «Наука», 1971.

ASYMPTOTICAL PROPERTIES OF ONE NONLINEAR MULTIDIMENSIONAL SEQUENCE FILTER

A. YE. KOLESSA

The paper is concerned with filtering a partially observable filter described by recurrence equations nonlinear with respect to the unobservable component. The upper edge is found of the trace of a deterministic gain. Under certain conditions this error is shown to tend to zero with time. A filter gain optimal in terms of the upper edge of the r.m.s. filtering error is found.