АКАДЕМИЯ НАУК СССР

# РАДИОТЕХНИКА
# И
# ЭЛЕКТРОНИКА

Том XXVI

(ОТДЕЛЬНЫЙ ОТТИСК)

3

МОСКВА · 1981

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1981 № 3

УДК 621.396.677.012.12

# МЕТОД АНАЛИЗА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КНД ФАЗИРОВАННОЙ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ АМПЛИТУДАХ, ФАЗАХ И РАСПОЛОЖЕНИИ ИЗЛУЧАТЕЛЕЙ

*В. И. Стеблин, В. Н. Классен*

Разработан новый метод асимптотической оценки кнд фазированной антенной решетки (ФАР) при произвольных амплитудно-фазовых ошибках и расположении излучателей. Метод позволяет достаточно просто вычислять общие асимптотические, относительно числа излучателей в решетке, выражения для среднего значения и дисперсии кнд.

Показано, что в частных случаях эти выражения совпадают с известными. Приведены результаты численных расчетов.

1. Если изотропные по азимутальному углу излучатели квадратной плоской фазированной антенной решетки (ФАР) имеют амплитуды возбуждения $a_n$ и фазы $\psi_n$, то диаграмма направленности (ДН) по мощности может быть записана следующим образом:

$$P(u,v,u_0,v_0)=|f(\theta)|^2\Big[\sum_l a_l^2+ \\ +{\sum_{m,n}}' a_n a_m e^{i(\psi_m-\psi_n)}\exp\{ik[(u-u_0)(x_m-x_n)+(v-v_0)(y_m-y_n)]\}\Big], \tag{1}$$

где $u=\sin\theta\cos\varphi$; $v=\sin\theta\sin\varphi$; $k=2\pi/\lambda$. Пределы суммирования здесь и далее, если не оговорено иное условие, предполагаются от 1 до $N$, а знак (′) означает, что опускаются члены с $m=n$. Подставляя (1) в выражение, определяющее кнд ФАР (см., например, [1]), получаем

$$D=2|f(\theta_0)|^2\times \\ \times\frac{\sum_l a_l^2+{\sum_{m,n}}' a_m a_n e^{i(\psi_m-\psi_n)}}{J_1\sum_f a_f^2+{\sum_{m,n}}' a_m a_n R(z_{mn})e^{i(\psi_m-\psi_n)}\exp\{-ik[u_0(x_m-x_n)+v_0(y_m-y_n)]\}}, \tag{2}$$

где

$$z_{mn}=k\sqrt{(x_m-x_n)^2+(y_m-y_n)^2};\quad J_1=\int_0^{\pi/2}|f(\theta)|^2\sin\theta\,d\theta; \tag{3}$$

$$R(z_{mn})=\int_0^{\pi/2}|f(\theta)|^2\sin\theta J_0(z_{mn}\sin\theta)\,d\theta;$$

$|f(\theta)|^2$ — ДН излучателя по мощности.

Пусть $a_n$, $\psi_n$ и координаты излучателей суть независимые случайные величины. Введем далее по аналогии с выборочными средними в математической статистике [2] величины $\varepsilon_j$, $j=1, 2, 3$, определяемые формулами

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{N}\sum_l a_l^2, \quad \varepsilon_2 = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{m<n} a_m a_n e^{i(\psi_m-\psi_n)},$$

$$(4) \qquad \varepsilon_3 = \frac{2}{N(N-1)}\sum_{m<n} a_m a_n R(z_{mn})\, e^{i(\psi_m-\psi_n)} \times$$

$$\times \exp\{-ik[u_0(x_m-x_n)+v_0(y_m-y_n)]\}.$$

Представим кнд ФАР, нормированный к $2|f(\theta_0)|^2 N/J_1$, т. е. к своему значению для взаимно ортогональных ДН, как функцию отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$(5) \qquad D(\Delta\varepsilon_k) = \frac{J_1}{N}\,\frac{\mu_1+(N-1)\mu_2+\Delta\varepsilon_1+(N-1)\Delta\varepsilon_2}{\mu_1+(N-1)\mu_3+\Delta\varepsilon_1+(N-1)\Delta\varepsilon_3},$$

где $\Delta\varepsilon_k=\varepsilon_k-\mu_k$; $k=1, 2, 3$; $\mu_k$ — математическое ожидание случайной величины $\varepsilon_k$. Кнд ФАР представлен в (5) функцией малых параметров $\Delta\varepsilon_j$. Действительно, их математические ожидания равны нулю, а дисперсии стремятся к нулю с ростом $N$ [2]. Разложим кнд (5) в ряд Тейлора в окрестности точки $(\Delta\varepsilon_k\equiv 0)$ и ограничимся в этом разложении линейным членом. Учет членов более высокого порядка даст при $N\to\infty$ пренебрежимо малые поправки к статистическим характеристикам кнд. Тогда среднее значение и дисперсия кнд определятся формулами [3]

$$(6) \qquad \begin{gathered} \overline{D}=D(\overline{\Delta\varepsilon_k}), \\ \sigma_D{}^2 = \sum_{i=1}^{3} D_i'^2(\overline{\Delta\varepsilon_k})\,\sigma^2_{\Delta\varepsilon_i} + 2\sum_{m<n}^{3} D_m'(\overline{\Delta\varepsilon_k})\,D_n'(\overline{\Delta\varepsilon_k})\,\overline{\Delta\varepsilon_m\Delta\varepsilon_n}. \end{gathered}$$

**2.** Предполагая, что законы распределения величин фаз и амплитуд независимы и одинаковы для всех излучателей, а также, что закон распределения фаз излучателей симметричен относительно математического ожидания $\overline{\psi}_j=0$, $j=1, \ldots, N$, получим следующие выражения для статистических характеристик кнд:

$$(7) \qquad \overline{D}(u_0, v_0) = \frac{J_1}{N}\,\frac{\overline{a^2}+(N-1)\,\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2}{J_1\overline{a^2}-\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\left(1-\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i,j}\beta_{ij}\right)},$$

$$(8) \qquad \sigma_D{}^2(u_0, v_0) = \frac{\overline{D}^2}{N}\left(\frac{N-1}{\overline{a^2}+(N-1)\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2}\right)^2 \times$$

$$\times\left\{\left[\frac{\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\left(1-\dfrac{1}{N-1}\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)\right)}{J_1\overline{a^2}+\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)}\right]^2\times\right.$$

$$\times\left[\frac{4(\overline{a^3}-\bar{a}\overline{a^2})}{\bar{a}}\frac{(\overline{a^2}+\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2(N-1))\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)}{(N-1)-\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)}+\overline{a^4}-\right.$$

$$\left.-\overline{a^2}^2\right]+\frac{2\,(N-2)}{N-1}\left[\overline{a^2}\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\,(1+\overline{\cos 2\psi})-2\bar{a}^4\,\overline{\cos\psi}^4\right]+$$

$$+\frac{\overline{a^2}^2\,(1+\overline{\cos 2\psi^2})-2\bar{a}^4\,\overline{\cos\psi}^4}{N-1}+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{N-1}\,\frac{\overline{a^2}+\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\,(N-1)}{J_1\overline{a^2}+\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)}\right)^2\times$$

$$\times\left[\frac{\sigma_1^2\left\{\sum_{i,j}\beta_{ij}^2-N+2r\left(\sum_{i,j}\beta_{ij}\beta_{il}-\sum_{i,j}\beta_{ij}^2-2\sum_{i,j}\beta_{ij}+2N\right)\right\}+\sigma_2^2\left\{\sum_{i,j}\gamma_{ij}^2+2r'\left(\sum_{i,j,l}\gamma_{ij}\gamma_{il}-\sum_{i,j}\gamma_{ij}^2\right)\right\}}{N}\right]-$$

$$-\frac{4}{J_1\overline{a^2}+\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\left(\frac{1}{N}\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right)}\left[\bar{a}^3\,\overline{\cos\psi}^4\,(\overline{a^3}-\bar{a}\overline{a^2})+\right.$$

$$+\frac{\sigma_1^2\,(\overline{a^2}+(N-1)\,\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2)\,\{1+2r\,(N-2)\}\left(\sum_{i,j}\beta_{ij}-N\right)}{N\,(N-1)^2}-$$

$$\left.\left.-\frac{\bar{a}^3\,\overline{\cos\psi}^4}{N-1}\left[\frac{1}{N}\sum_{i,j}\beta_{ij}-1\right]\right]\right\},$$

где

$$\beta_{ij}=\cos k[u_0(x_i-x_j)+v_0(y_i-y_j)]\times R(z_{ij});$$

$$\gamma_{ij}=\sin k[u_0(x_i-x_j)+v_0(y_i-y_j)]\times R(z_{ij});$$

(9) $$r=\frac{\overline{a^2}\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2\,(1+\overline{\cos 2\psi})-2\bar{a}^4\,\overline{\cos\psi}^4}{\overline{a^2}^2\,(1+\overline{\cos 2\psi^2})-2\bar{a}^4\,\overline{\cos\psi}^4};$$

$$r'=\frac{\bar{a}^2\,\overline{\cos\psi}^2}{\overline{a^2}(1+\overline{\cos 2\psi})};$$

$$\sigma_1^2=\frac{\overline{a^2}^2}{2}\,(1+\overline{\cos 2\psi^2})-\bar{a}^4\,\overline{\cos\psi}^4;$$

$$\sigma_2^2=\frac{\overline{a^2}^2}{2}(1-\overline{\cos 2\psi^2});$$

$a$ — случайная амплитуда возбуждения излучателя. Многократные суммы в (7), (8) могут быть вычислены при помощи ЭВМ. Однако, пользуясь формулой суммирования Пуассона, они сводятся к сумме интегралов, которые при $kL\gg1$, $L$ — линейный размер решетки, могут быть вычислены асимптотически.

Для $v_0=0$ (что не ограничивает общности дальнейших результатов) и полуизотропных излучателей асимптотические выражения для этих сумм при $d/\lambda=\alpha$, $\alpha<1$, следующие:

$$\sum_{i,j}\beta_{ij}=\frac{N}{2\pi\alpha^2}\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1-u_0^2}}, & 0\leqslant u_0<\dfrac{1}{\alpha}-1,\\ \sqrt{N\alpha}, & u_0=\dfrac{1}{\alpha}-1,\\ \dfrac{\sqrt{1-u_0^2}+\sqrt{1-\left(u_0-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}}{\sqrt{1-u_0^2}\sqrt{1-\left(u_0-\dfrac{1}{\alpha}\right)^2}}, & \dfrac{1}{\alpha}-1<u_0<1;\end{cases} \tag{10}$$

$$\sum_{i,j,l}\gamma_{ij}\gamma_{il}=0; \tag{11}$$

$$\sum_{i,j,l}\beta_{ij}\beta_{il}=\frac{1}{N}\left[\sum\beta_{ij}\right]^2. \tag{12}$$

Оставшиеся суммы можно привести к виду

$$\sum_{i,j}\beta_{ij}^2=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j}\frac{\sin^2 z_{ij}}{z_{ij}^2}+\sum_{q,j}\frac{\sin^2 z_{qj}}{z_{qj}^2}e^{-i2ku_0(x_q-x_j)}\right\}, \tag{13}$$

$$\sum_{i,j}\gamma_{ij}^2=\frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j}\frac{\sin^2 z_{ij}}{z_{ij}^2}-\sum_{q,j}\frac{\sin^2 z_{qj}}{z_{qj}^2}e^{-i2ku_0(x_q-x_j)}\right\}. \tag{14}$$

Для первой суммы в (13) имеем

$$\sum_{i,j}\frac{\sin^2 z_{ij}}{z_{ij}^2}=\frac{N}{4\pi\alpha^2}\times \tag{15}$$

$$\times\begin{cases}4\operatorname{Arch}(\sqrt{2}\,\alpha)+4\operatorname{Arch}(2\alpha)+\ln(\gamma kL\sqrt{2}), & \dfrac{1}{\sqrt{2}}<\alpha\leqslant 1,\\ 4\operatorname{Arch}(2\alpha)+\ln(\gamma kL\sqrt{2}), & \dfrac{1}{2}<\alpha<\dfrac{1}{\sqrt{2}},\\ \ln(\gamma kL\sqrt{2}), & 0<\alpha\leqslant\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

где $\gamma=1{,}781\ldots$ — постоянная Эйлера [8]. Для второй суммы в (13) и (14) получим

$$\sum_{q,j}\frac{\sin^2 z_{qj}}{z_{qj}^2}e^{-i2ku_0(x_q-x_j)}=\frac{N}{4\pi\alpha^2}\times \tag{16}$$

$$\times\begin{cases}\sum\limits_{m,p=-\infty}^{\pm\infty}\operatorname{Arch}\left(\dfrac{2\alpha}{R}\right), & 0<R\leqslant 2\alpha,\\ \ln(\gamma kL\sqrt{2}), & R=0,\end{cases}$$

где $R=\sqrt{(m-2\alpha u_0)^2+p^2}$. При $0\leqslant R\leqslant 2\alpha$ количество членов суммы зависит от $d/\lambda$, $u_0$ и в худшем случае не превышает 15. Отметим, что (10) совпадает с результатом, полученным в [4].

Результаты расчетов по формулам (7) и (8) с учетом (9)—(16) в случае фазовых искажений приведены на рис. 1 и 2, а в случае амплитудных искажений — на **рис. 3 и 4**.

Рис. 1: $d=0{,}5\lambda$; $N=441$; *1* — $\psi_0=0$, *2* — $\psi_0=\pi/8$, *3* — $\psi_0=3\pi/16$, *4* — $\psi_0=\pi/4$, *5* — $\psi_0=\pi/2$

Рис. 2: $d=0{,}75\lambda$; $N=441$; *1* — $\psi_0=0$, *2* — $\psi_0=\pi/8$, *3* — $\psi_0=3\pi/16$, *4* — $\psi_0=\pi/4$, *5* — $\psi_0=\pi/2$

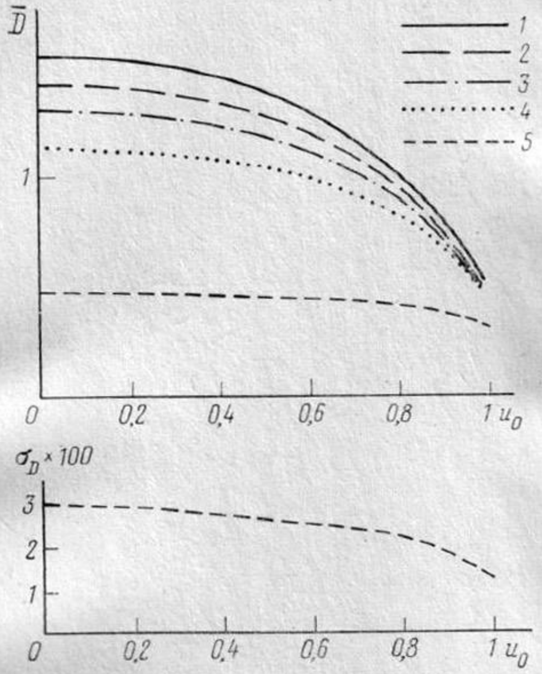


Рис. 1

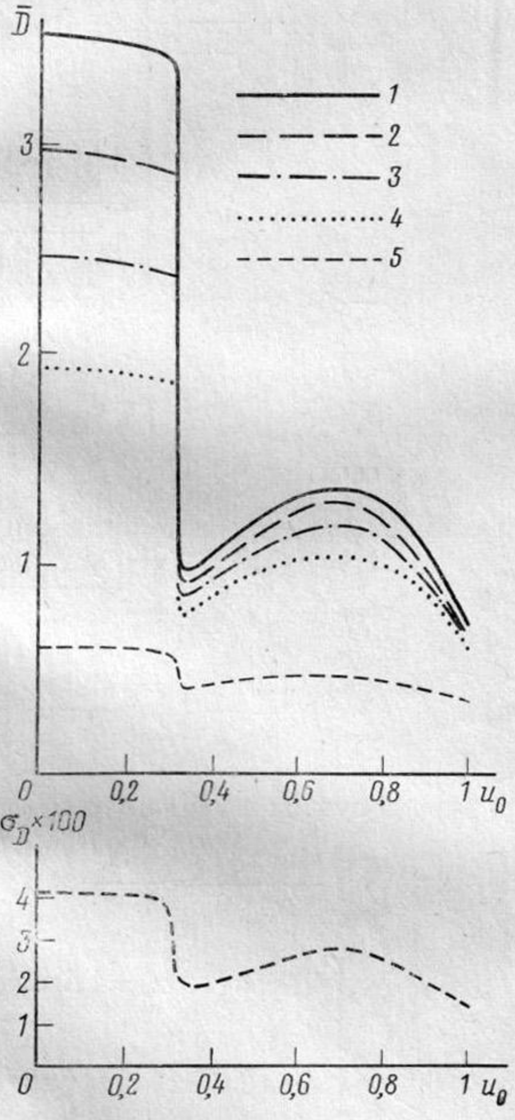


Рис. 2

При расчетах предполагалось, что фазы и амплитуды излучателей распределены по равновероятному закону в интервалах $(-\psi_0, \psi_0)$, $(\bar{a}-\Delta a, \bar{a}+\Delta a)$, $\bar{a}=1/2$, соответственно. Кривые на рисунках соответствуют амплитудным искажениям, выраженным в процентном отношении $\delta=\Delta a/\bar{a}$, и фазовым искажениям, выраженным через ширину полуинтервала распределения.

3. Кроме приведенного достаточно общего результата полученные в [5] частные результаты при помощи описанного метода получаются проще. Так, в упомянутой работе получены строгие выражения для среднего кнд и его дисперсии для линейной антенной решетки изотропных излучателей. Выражения, получаемые при помощи введения переменных (4) и исполь-

зований соотношений (6), отличаются от точных членами порядка $1/N$ для $\overline{D}$ и $1/N^2$ для $\sigma_D^2$.

Более того, при наличии в такой антенной решетке как фазовых, так и амплитудных искажений последовательное применение изложенного метода приводит к следующему результату:

$$\overline{D}=\overline{D}_A\overline{D}_\Phi, \tag{17}$$

$$\sigma_D{}^2=\frac{\overline{D}_A{}^2\overline{D}_\Phi{}^2}{N}\left\{\frac{\overline{a^4}}{\overline{a^2}^2}+\frac{4\overline{a^2}}{\bar{a}^2}\frac{\overline{\cos^2\psi}}{\overline{\cos\psi}^2}\frac{4\overline{a^3}}{\bar{a}\overline{a^2}}-1\right\}, \tag{18}$$

где $\overline{D}_A=\bar{a}^2/\overline{a^2}$; $\overline{D}_\Phi=\overline{\cos\psi}^2$.

Рис. 3: $d=0{,}5\lambda$; $N=441$; *1* – $\delta_1=0$, *2* – $\delta_2=25$, *3* – $\delta_3=50$, *4* – $\delta_4=75$, *5* – $\delta_5=100$

Рис. 4: $d=0{,}75\lambda$; $N=441$; *1* – $\delta_1=0$, *2* – $\delta_2=25$, *3* – $\delta_3=50$, *4* – $\delta_4=75$, *5* – $\delta_5=100$

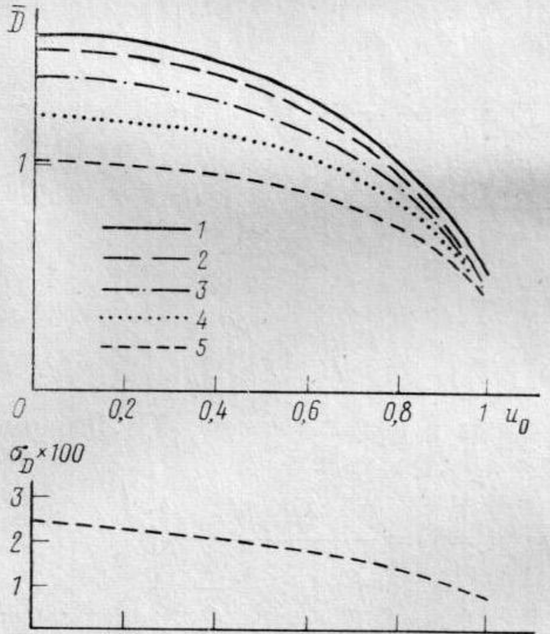


Рис. 3

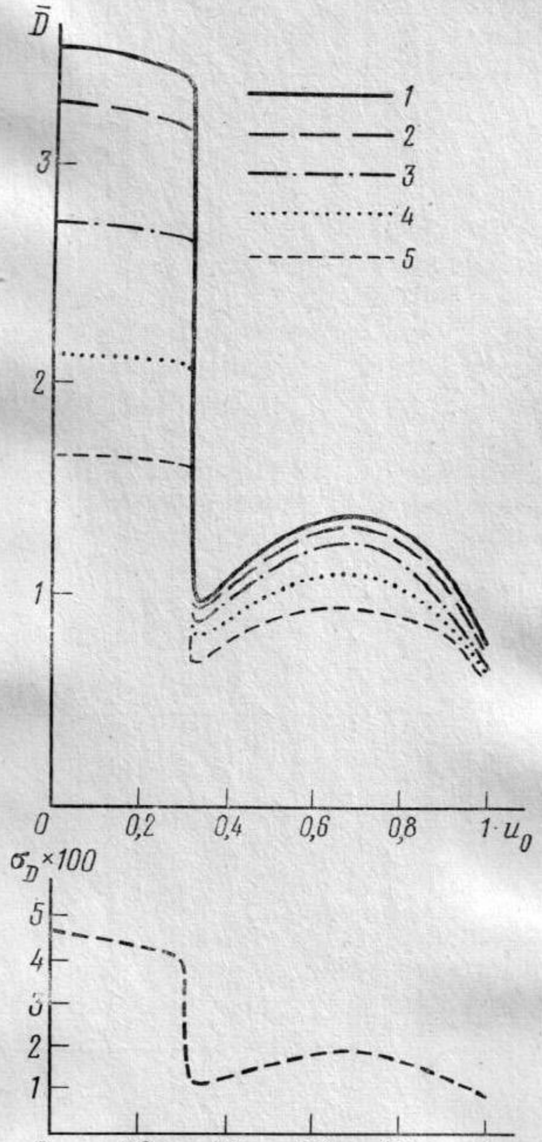


Рис. 4

Из (17) следует, что среднее значение нормированного кнд линейной решетки ортогональных излучателей при амплитудно-фазовых искажениях равно произведению среднего значения нормированного кнд при амплитудных искажениях ($\overline{D}_A$) на среднее значение нормированного кнд при фазовых искажениях ($\overline{D}_\Phi$). Таким образом, соотношения (17), (18) обобщают результаты работы [5].

Пусть амплитуды излучателей $a_j$ распределены по равновероятному закону в интервале $(1-\Delta a,\ 1+\Delta a)$. Тогда, например, для $N=20$

$$\overline{D}=\frac{3}{3+\Delta a^2}, \tag{19}$$

$$\sigma_D{}^2=\frac{3\Delta a^4(3+5\Delta a^2)}{25(3+\Delta a^2)^4}. \tag{20}$$

Результаты расчетов по формулам (19), (20) и результаты расчетов на ЭВМ [5] приведены в таблице.

| $\Delta a$ | 1 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 | $\Delta a$ | 1 | 0,8 | 0,6 | 0,4 | 0,2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\overline{D}$ | 0,75 | 0,82 | 0,89 | 0,95 | 0,99 | $\sigma_D\cdot 10^2$ | 6,1 | 4,2 | 2,4 | 1,1 | 0,3 |
| $\overline{D}_{\text{ЭВМ}}$ | 0,79 | 0,86 | 0,91 | 0,96 | 0,99 | $\sigma_D^{\text{ЭВМ}}\cdot 10^2$ | 5,1 | 3,5 | 2,2 | 1,6 | 0,8 |

Таким образом, совпадение результатов достаточно хорошее даже при сравнительно небольшом $N$.

4. Соотношения (5), (6) могут быть использованы для исследования статистических характеристик кнд произвольных неэквидистантных антенных решеток. Для плоских решеток с равновероятным законом расположения излучателей в раскрыве найденное таким способом среднее значение кнд совпадает с [6].

Рассмотрим случай линейной неэквидистантной решетки с равновероятным законом расположения излучателей $x_n \in (-L/2,\ L/2)$. В этом случае для изотропных излучателей

$$\overline{D}=\left\{1+\frac{N-1}{kL}\left\{\mathrm{Si}[kL(1+u_0)]+\mathrm{Si}[kL(1-u_0)]+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\cos[kL(1+u_0)]-1}{kL(1+u_0)}+\frac{\cos[kL(1-u_0)]-1}{kL(1-u_0)}\right\}\right\}^{-1}, \tag{21}$$

$$\sigma_D{}^2=\frac{\overline{D}^4}{kL}\{(1+u_0)\,\mathrm{Si}[2kL(1+u_0)]+$$
$$+(1-u_0)\,\mathrm{Si}[2kL(1-u_0)]+2\,\mathrm{Si}(2kL)-2u_0\,\mathrm{Si}(2kLu_0)\}. \tag{22}$$

Выражения (21), (22) для $u_0=0$ совпадают с результатами [7]. Для ненормированного кнд при $d_{\text{ср}}=L/N\lambda\ll 1$ из (21) получаем

$$\overline{D}(u_0=0)=\frac{2d_{\text{ср}}N}{1+2d_{\text{ср}}-\dfrac{1}{N}};\quad \overline{D}(u_0=1)=\frac{4d_{\text{ср}}N}{1+4d_{\text{ср}}-\dfrac{1}{N}},$$

что с точностью до членов порядка $1/N$ совпадает с соответствующим результатом для непрерывного раскрыва [1].

Предложенный метод анализа статистических характеристик кнд при больших ФАР, произвольных амплитудно-фазовых искажениях и неэквидистантном расположении излучателей позволяет достаточно просто вычислять общие асимптотические (относительно $1/N$) выражения для $\overline{D}$ и $\sigma_D{}^2$, которые совпадают с результатами ранее рассмотренных частных случаев.

Авторы считают своим приятным долгом поблагодарить В. В. Меркулова за полезные консультации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сканирующие антенные системы СВЧ, **2**, перев. с англ. под ред. Г. Т. Маркова и А. Ф. Чаплина, Изд. Советское радио, 1969.
2. Д. Худсон, Статистика для физиков, Изд. Мир, 1970.
3. Е. С. Вентцель, Теория вероятностей, Изд. Наука, 1964.
4. В. В. Меркулов, П. А. Савельев, Радиотехника и электроника, 1974, **19**, 1, 20.
5. В. В. Меркулов, Радиотехника и электроника, 1966, **11**, 11, 2066.
6. В. В. Меркулов, П. А. Савельев, Радиотехника и электроника, 1976, **21**, 6, 1324.
7. В. В. Меркулов, Радиотехника и электроника, 1966, **11**, 5, 928.
8. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш, Специальные функции, Изд. Наука, 1968.

Поступила в редакцию
18 I 1980