РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

№ 10

МОСКВА. 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 10

О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Б. Е. Кинбер

Рассмотрена осесимметричная задача о дифракции тороидальной волны, возбуждаемой кольцевой нитью тока, на внутренней поверхности сферы. Условие периодичности по углу θ заменено условием излучения. Исследование коротковолновой асимптотики решения показывает, что результирующее поле может быть представлено в виде суммы лучей многократно отраженных волн, полей каустик и поля волны «шепчущей галереи». Отличие дифракции на сфере от дифракции на цилиндре [1] определяется множителем фокусировки, имеющим чисто геометрический смысл вдали от оси симметрии и чисто дифракционный — вблизи нее. Исследованная задача позволяет описать дифракцию краевой волны на вогнутой стороне зеркальной антенны.

ВВЕДЕНИЕ

При падении волны на зеркало конечного размера от его кромки, как показывает анализ решения задачи о дифракции на полуплоскости и диске, уходит цилиндрическая или тороидальная волна. Благодаря вогнутой поверхности зеркала эта волна несколько раз отражается от поверхности зеркала.

В работе [1] исследованы некоторые закономерности дифракции такой волны на вогнутой цилиндрической поверхности. Ниже рассмотрены закономерности дифракции вблизи вогнутой поверхности двойной кривизны, в качестве которой выбрана простейшая — поверхность сферы. Для упрощения задачи рассмотрено осесимметричное поле, возбуждаемое кольцом тока.

В реальном зеркале волны, отражающиеся от его вогнутой поверхности, уходят от зеркала и поле удовлетворяет условию излучения. В рассматриваемой задаче для упрощения решения взята замкнутая поверхность сферы, а условие излучения вводится заранее, т. е. вне кольца тока решение ищется в виде суммы нормальных волн, «убегающих» по углу θ от кольца. Такая форма решения применялась ранее [2, 3] при анализе распространения сверхдлинных волн между поверхностью земли и ионосферой.

Таким образом, в отличие от обычного определения в сферической системе координат, θ меняется в интервале $(-\infty, \infty)$. Значения θ, отличающиеся на $2\pi n$, соответствуют разному количеству «оборотов» волны, т. е. разным фазовым сомножителям. Интересующая нас область изменения θ, учитывая симметрию задачи, лежит в интервале $(0, \pi)$.

Естественно, что при осевой симметрии задачи расположение лучей в меридиональной плоскости сферы совпадает с расположением лучей в цилиндре. Поэтому часть выкладок, совпадающая с аналогичными расчетами в цилиндре, не приведена.

1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Решение задачи, обладающей осевой симметрией, можно представить в виде полной системы собственных функций, удовлетворяющих граничным условиям. Все составляющие можно выразить через потенциал Абрагама, имеющий только φ-ю составляющую поля, $\vec{A} = \vec{\varphi}_0\, A(\theta, R)$ как для поля электрического типа

$$\begin{aligned} &H_R = -\frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A), \quad E_R = 0, \\ &H_\theta = \frac{1}{\omega\mu\varepsilon R}\frac{\partial}{\partial R}(RA), \quad E_\theta = 0, \\ &H_\varphi = 0, \quad E_\varphi = i\omega A, \end{aligned} \tag{1}$$

так и для поля магнитного типа

$$\begin{aligned} &H_R = 0, \quad E_R = -\frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A), \\ &H_\theta = 0, \quad E_\theta = \frac{1}{\omega\mu\varepsilon R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial R}(RA), \\ &H_\varphi = -\,i\omega A, \qquad E_\varphi = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Потенциал A удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{R}\frac{\partial^2}{\partial R^2}(RA) + \frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A)\right) + K^2A = 0, \tag{3}$$

где $k^2 = \omega^2\mu\varepsilon$.

Граничное условие для потенциала для волн электрического типа имеет вид

$$A = 0, \tag{4}$$

а для волн магнитного типа —

$$\frac{\partial}{\partial R}(RA) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (3) решается методом разделения переменных:

$$A = U(R)\,\Phi(\theta). \tag{6}$$

Решение для U без особенности в центре сферы имеет вид

$$U = \frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR), \quad \operatorname{Re}\nu \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\nu \geqslant 0, \tag{7}$$

а собственные значения ν определяются из (4) или (5) как корни уравнений

$$J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) = 0, \tag{4a}$$

$$\frac{\partial}{\partial(kR)}\left[\sqrt{kR}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{R=a} = 0\quad, \tag{5a}$$

где a — радиус сферы.

Решение уравнения для Φ возьмем в виде $P_\nu^1(\cos\theta)$ или в виде

$$L_\nu = Q_\nu^1(\cos\theta) + i\frac{\pi}{2}P_\nu^1(\cos\theta).$$

Действительные корни (4a) или (5a) соответствуют распространяющимся волнам, а мнимые — затухающим волнам, описывающим особенность источника.

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Определим функцию Грина $\Gamma = \Gamma(R, \theta, R', \theta')$ задачи, т. е. функцию, удовлетворяющую следующим условиям.

1. Γ удовлетворяет волновому уравнению (3) всюду, за исключением кольца (R', θ') $(kR'\sin\theta' \gg 1)$, где находится нить тока.

2. Вблизи кольца (R', θ') Γ имеет особенность:

$$\Gamma = \pi i H_0^{(1)}(k\varrho) + \Gamma' \cong -2\ln k\rho, \tag{8}$$

где ϱ — расстояние от точки наблюдения до ближайшей точки кольца; Γ' — функция без особенностей.

3. При $|\theta - \theta'| \to \infty$ Γ удовлетворяет условию излучения волноводного типа, т. е. является волной, бегущей от источника.

4. На поверхности сферы $R = a$ Γ удовлетворяет граничному условию (4а) или (5а), а в центре сферы не имеет особенностей.

Используем далее вместо условия возбуждения (8) его эквивалент

$$\left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta'+0} - \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta'-0} = -4\pi R\delta(R - R') \tag{9}$$

на конусе $\theta = \theta'$.

Будем искать Γ в виде

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{kR}}\sum_s A_s J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)\, L_{\nu_s}(\cos\theta)\, P^1_{\nu_s}(\cos\theta'), \quad \theta \geqslant \theta', \\ \Gamma &= \frac{1}{\sqrt{kR}}\sum_s A_s J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)\, P^1_{\nu_s}(\cos\theta)\, L_{\nu_s}(\cos\theta'), \quad \theta \leqslant \theta'. \end{aligned} \tag{10}$$

Суммирование производится по всем собственным значениям ν_s.

Подставляя (10) в (9) и учитывая, что

$$\frac{d}{d\theta}L_\nu P^1_\nu - \frac{d}{d\theta}P^1_\nu L_\nu = -\frac{\nu(\nu+1)}{\sin\theta}, \tag{11}$$

умножая обе части равенства на $\frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)$, интегрируя по R в пределах $(0, a)$, используя соотношение

$$\int\frac{J_n J_m}{x}dx = \frac{x}{n^2 - m^2}[J_n J'_m - J_m J'_n] \qquad (x = kR)$$

и граничные условия, получим

$$A_s = 8\pi\frac{\sqrt{kR'}}{ka}\sin\theta'\frac{\nu_s + \frac{1}{2}}{\nu_s(\nu_s+1)}J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR')\frac{1}{D_s}, \tag{12}$$

где

$$D_s = \frac{1}{\sqrt{kR}}\frac{d}{d\nu}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\frac{d}{d(kR)}\left[\sqrt{kR}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{\substack{R=a\\ \nu=\nu_s}} \tag{13а}$$

при граничном условии (4а) и

$$D_s = -\frac{1}{\sqrt{kR}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\frac{d^2}{d\nu\, d(kR)}\left[\sqrt{kR}\,J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)\right]\Big|_{\substack{R=a\\ \nu=\nu_s}} \tag{13б}$$

при граничном условии (5а).

Подставляя (12) в (10), получим

$$\Gamma = \frac{8\pi}{ka}\sqrt{\frac{R'}{R}}\sin\theta'\sum_s\frac{\nu_s + \frac{1}{2}}{\nu_s(\nu_s+1)D_s}\, J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR)\, J_{\nu_s+\frac{1}{2}}(kR')\begin{Bmatrix} L_{\nu_s} & P^1_{\nu_s} \\ P^1_{\nu_s} & L_{\nu_s}\end{Bmatrix}, \tag{14}$$

где для $\theta \geqslant \theta'$ берется верхняя строчка в фигурной скобке, а для $\theta \leqslant \theta'$ — нижняя строчка.

Будем далее рассматривать граничное условие (5а), а кольцо тока поместим на стенку. В этом случае выражение (14) можно представить в виде интеграла по контуру C_0, охватывающего все собственные значения ν_s на комплексной плоскости ν, но не захватывающего начало координат:

$$\Gamma = \frac{L}{ka}\sqrt{\frac{a}{R}}\sin\theta' \int\limits_{C_0} \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka) + \frac{1}{2ka} J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)} \frac{\nu+\frac{1}{2}}{\nu(\nu+1)} \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} L_\nu(\cos\theta) & P^1_\nu(\cos\theta') \\ P^1_\nu(\cos\theta) & L_\nu(\cos\theta') \end{Bmatrix} d\nu. \tag{15}$$

3. АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ПРИ $ka \gg 1$

Рассмотрим асимптотику решения (15) для случая сферы большого радиуса, $ka \gg 1$. В этом случае можно отбросить член $\frac{1}{2ka} J_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)$ в знаменателе.

В соответствии с асимптотическим представлением присоединенных функций Лежандра будем различать два случая для значения ν в точках стационарной фазы (см. [1]):

а) $\theta\nu \gg 1$ — область вдали от оси симметрии,

б) $\theta\nu \ll 1$ (или $(\pi - \theta)\,\nu \ll 1$) — область фокального пятна вблизи оси симметрии.

Рассмотрим оба случая.

а) $\theta\nu \gg 1$.

В этом случае

$$L_\nu = \sqrt{\frac{\pi\nu}{2\sin\theta}} \exp\left\{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{3\pi}{4}\right]\right\},$$
$$P^1_\nu = \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\sin\theta}} \sin\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta + \frac{3\pi}{4}\right] \tag{16}$$

и (15) можно записать в виде

$$\Gamma = -\frac{2}{ka}\sqrt{\frac{a\sin\theta'}{R\sin\theta}} \int \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)} \left\{e^{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta')\frac{\pi}{2}\right]} - e^{\mp i\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')}\right\} d\nu, \tag{17}$$

Причем знак плюс в показателе второго члена соответствует случаю $\theta > \theta'$, а знак минус — случаю $\theta < \theta'$.

При выводе полагалось, что $\nu \gg 1$, т. е. $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\Big/(\nu+1) = 1$. Легко видеть, что сомножитель $\sqrt{a\sin\theta'/R\sin\theta}$ соответствует чисто геометрическому фактору усиления амплитуды из-за уменьшения сечения лучевых трубок между меридиональными плоскостями.

В остальном формула (17) соответствует формуле (19) работы [1], если учесть также, что слагаемое с фазой $\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta+\theta') - \frac{\pi}{2}$ соответствует излучению блестящей точки на дальней части кольца тока, а слагаемое с фазой $\mp\left(\nu+\frac{1}{2}\right)(\theta-\theta')$ — излучению ближней точки кольца тока. Дополнительная фаза $-\pi/2$ в первом члене связана с прохождением поля через осевую каустику.

Таким образом, различие в дифракции нити тока на вогнутой цилиндрической поверхности и кольца тока на сферической поверхности вдали от оси состоит лишь в дополнительной геометрической фокусировке, связанной с осевой симметрией задачи и наличием двух «источников», соответствующих дальней и ближней точкам кольца. Полное поле можно представить в виде суммы лучей, проходящих или пролетающих мимо точки наблюдения, и полей поверхностных волн, излучаемых двумя источниками,— ближней и дальней точками наблюдения.

Внутри кольца тока лучи и волны движутся навстречу друг другу и образуют стоячую волну; вне кольца они движутся примерно по одному направлению.

Количество и амплитуда волн, расположение каустик соответствуют анализу, проделанному для цилиндрической поверхности.

б) $\theta\nu \ll 1$. Случай $\theta\nu \ll 1$ соответствует интересующему нас случаю дифракции краевой волны кромки зеркала в центре вогнутой поверхности зеркала. Поскольку мы заранее предположили, что диаметр кольца тока много больше длины волны, то в (15) асимптотика $L_\nu(\cos\theta)$ берется согласно (16), а для $P_\nu^1(\cos\theta)$ справедливо выражение [4]

$$P_\nu^1(\cos\theta) \simeq -\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_1\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta\right]. \tag{18}$$

Следовательно,

$$\Gamma = i\,\frac{\sqrt[4]{\frac{\pi}{2}}}{ka}\sqrt{\frac{a\sin\theta'}{R}\,\frac{\theta}{\sin\theta}}\int \sqrt{\nu}\, J_1\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta\right] \times$$
$$\times \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR)}{J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)}\, e^{i\left[\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\theta' + \frac{3\pi}{4}\right]}\, d\nu. \tag{19}$$

Поскольку функция (18) меняется медленно по сравнению с функцией $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kR) \Big/ J'_{\nu+\frac{1}{2}}(ka)$ при изменении ν, то при интегрировании по методу стационарной фазы она может рассматриваться как медленно меняющаяся.

В остальном структура подынтегрального выражения (19) соответствует структуре подынтегрального выражения первого члена (17) для $\theta = 0$, и, следовательно, интеграл (19) дает обычные амплитуды поля лучей и каустик, умноженные на фактор $\sqrt{\nu}\, J_1\left[\left(\nu + \frac{1}{2}\right)\theta'\right]$, который можно рассматривать как дифракционный фактор фокусировки вблизи фокального пятна.

Как было отмечено ранее [1], в точках стационарной фазы ν должно быть меньше ka для того, чтобы можно было при интегрировании применять метод стационарной фазы. Поэтому следует трансформировать в интеграл не весь ряд (14), а оставить в старом виде нормальные волны с наибольшими ν_s, которые интерпретируются как поверхностная волна шепчущей галереи. Легко видеть, что приведенный выше анализ асимптотик угловых функций применим к ряду так же, как и к интегралу. Поэтому наряду с осевой фокусировкой лучей и каустик происходит фокусировка поверхностной волны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Анализ асимптотики дифракции на поверхности двойной кривизны показал, что отличие дифракции на ней от дифракции на цилиндрической поверхности состоит в факторе геометрической фокусировки вдали от оси симметрии и факторе дифракционной фокусировки вблизи оси симметрии по отношению ко всем элементам, составляющим полное поле,— лучам, каустикам и поверхностной волне.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Е. Кинбер, О дифракции электромагнитных волн на вогнутой поверхности кругового цилиндра, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 8, 000.
2. П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947.
3. W. Schuman, Über die Oberfelder bei der Ausbreitung langer electrischer Wellen, Z. angew. Phys., 1954, 6, s. 35, 225, 267, 346.
4. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, Изд. Советское радио, 1955.

Поступила в редакцию
1 XII 1960