АКАДЕМИЯ НАУК СССР

АВТОМАТИКА
И
ТЕЛЕМЕХАНИКА

(отдельный оттиск)

4

МОСКВА · 1986

УДК 621.391.272:62-501.5

РЕКУРРЕНТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ФИЛЬТРАЦИИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОГО ТИПА

КОЛЕССА А. Е.

(Москва)

Рассматривается задача фильтрации частично наблюдаемой многомерной последовательности (θ_t, ξ_t), $t = 0, 1, \ldots$, подчиняющейся кусочно-линейным по ненаблюдаемой компоненте θ_t рекуррентным уравнениям с аддитивными возмущениями типа белого шума. Для случаев, когда уравнение для ненаблюдаемой компоненты не содержит случайных возмущений либо зависит от θ_t кусочно-постоянным образом, дается точное решение задачи фильтрации в виде замкнутых рекуррентных уравнений для апостериорной плотности вероятности и для оптимального в среднеквадратическом смысле фильтра.

1. Введение

Рассмотрим задачу фильтрации частично наблюдаемой $(k+l)$-мерной случайной последовательности (θ_t, ξ_t), $t=0, 1, \ldots$, состоящую в определении условной плотности $p_{\theta_t|\xi^t}(x_t|y^t)$ распределения вектора θ_t при гипотезе $\xi^t=y^t$, а также условного математического ожидания $\Lambda_t=M\{\theta_t| |\xi^t=y^t\}$ и условной ковариационной матрицы $\Delta_t=M\{(\theta_t-\Lambda_t)(\theta_t-\Lambda_t)^T| |\xi^t=y^t\}$. Здесь $\xi^t=y^t$ обозначает выполнение совокупности равенств $(\xi_0=y_0, \xi_1=y_1, \ldots, \xi_t=y_t)$, x^T — транспонированный вектор x.

Будем считать, что последовательность (θ_t, ξ_t), $t=0, 1, \ldots$ — марковская,

$$(1) \qquad p_{\theta_{t+1}|\theta_t, \xi^t}(x_{t+1}\,|\,x_t, y^t) = p_{\theta_{t+1}|\theta_t}(x_{t+1}\,|\,x_t),$$

$$(2) \qquad p_{\xi_{t+1}|\theta_{t+1}, \xi^t}(y_{t+1}\,|\,x_{t+1}, y^t) = p_{\xi_{t+1}|\theta_{t+1}}(y_{t+1}\,|\,x_{t+1}).$$

При этих условиях для $t=0, 1, \ldots$ имеет место рекурсивное байесовское соотношение [1]

$$(3) \qquad p_{\theta_{t+1}|\xi^{t+1}}(x_{t+1}\,|\,y^{t+1}) = \frac{p_{\xi_{t+1}|\theta_{t+1}}(y_{t+1}|\,x_{t+1}) \int p_{\theta_{t+1}|\theta_t}(x_{t+1}\,|\,x_t)\, p_{\theta_t|\xi^t}(x_t\,|\,y^t)\, dx_t}{\int [\text{числитель}]\, dx_{t+1}}.$$

В случае, когда плотности вероятности (1), (2) и $p_{\theta_0|\xi_0}(x_0|y_0)$ — гауссовские, апостериорная плотность вероятности, вычисленная в силу (3), также нормальна, причем параметры Λ_t, Δ_t удовлетворяют уравнениям фильтра Калмана — Бьюси [2].

Получить в замкнутом виде точное решение уравнения (3) в общем случае не представляется возможным. Наряду с большим числом публикаций, содержащих различные приближенные методы определения апостериорной плотности, а также параметров Λ_t, Δ_t, имеется ряд работ, посвященных проблеме точного оценивания в рекуррентной замкнутой форме. Так, например, в [3] решена задача фильтрации для систем с аддитивными шумами и нелинейностями кусочно-постоянного типа.

В настоящей работе предпринята попытка найти замкнутый алгоритм фильтрации для систем с нелинейностями кусочно-линейного типа, позволяющими более эффективно аппроксимировать нелинейности в реальных задачах.

2. Модификация байесовского рекурсивного соотношения

Пусть Ω_i, $i=1,\ldots,n$ — система попарно непересекающихся областей k-мерного евклидового пространства E_k, причем $E_k=\Omega_1\cup\ldots\cup\Omega_n$.

Дальнейшие рассуждения справедливы и в случае, когда последовательность (θ_t,ξ_t), $t=0,1,\ldots$ нестационарна, а множества Ω_i, $i=1,\ldots,n$ зависят от t. Однако во избежание чрезмерно громоздких обозначений там, где аргумент t отражает нестационарность задачи, он будет опущен.

Зададим функции $\varphi_i(y_t,x_t)$, $\psi_i(x_{t+1},x_t)$, $\chi_i(x_t,y^t,t)$, $i=1,\ldots,n$ таким образом, чтобы

$$p_{\xi_t|\theta_t}(y_t\,|\,x_t)=\sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(x_t)\,\varphi_i(y_t,x_t),$$

$$p_{\theta_{t+1}|\theta_t}(x_{t+1}\,|\,x_t)=\sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(x_t)\,\psi_i(x_{t+1},x_t),$$

$$p_{\theta_t|\xi^t}(x_t\,|\,y^t)=\sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(x_t)\,\chi_i(x_t,y^t,t). \tag{4}$$

Здесь $I_\Omega(x)$ — индикаторная функция.

Тогда (3) можно записать в следующем виде. Для $i_{t+1}=1,\ldots,n$ $(t=0,1,\ldots)$

$$\chi_{i_{t+1}}(x_{t+1},y^{t+1},t+1)= \tag{5}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_t=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{i_t}}\varphi_{i_{t+1}}(y_{t+1},x_{t+1})\,\psi_{i_t}(x_{t+1},x_t)\,\chi_{i_t}(x_t,y^t,t)\,dx_t}{\sum\limits_{i_{t+1}=1}^{n}\int\limits_{\Omega_{i_{t+1}}}[\text{числитель}]\,dx_{t+1}}.$$

Введем термин «ветвь» как последовательность номеров $i^t=(i_0,\ldots,i_t)$, $t=0,1,\ldots$, каждый из которых может принимать одно из значений $1,\ldots,n$. Для каждой ветви зададим $(k+l)$-мерную последовательность $(\bar\theta_t,\bar\xi_t)_{i^t}$, $t=0,1,\ldots$, положив

$$p_{(\bar\theta_0|\bar\xi_0)_{i_0}}(x_0\,|\,y_0)=\chi_{i_0}(x_0,y_0,0), \tag{6}$$

$$p_{(\bar\theta_{t+1}|\bar\theta_t,\bar\xi^t)_{i^t}}(x_{t+1}\,|\,x_t,y^t)=\psi_{i_t}(x_{t+1},x_t), \tag{7}$$

$$p_{(\bar\xi_{t+1}|\bar\theta_{t+1},\bar\xi^t)_{i^{t+1}}}(y_{t+1}\,|\,x_{t+1},y^t)=\varphi_{i_{t+1}}(y_{t+1},x_{t+1}). \tag{8}$$

Лемма 1. В принятых предположениях для $i_{t+1}=1,\ldots,n$ $(t=0,1,\ldots)$

$$\chi_{i_{t+1}}(x_{t+1},y^{t+1},t+1)= \tag{9}$$

$$=\frac{\sum\limits_{i_t=1}^{n}\cdots\sum\limits_{i_0=1}^{n}U_{t+1}^{i^{t+1}}R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1})\,p_{(\bar\theta_{t+1}|\bar\xi^{t+1})_{i^{t+1}}}(x_{t+1}\,|\,y^{t+1})}{\sum\limits_{i_{t+1}=1}^{n}\cdots\sum\limits_{i_0=1}^{n}U_{t+1}^{i^{t+1}}\int\limits_{\Omega_{i_{t+1}}}R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1})\,p_{(\bar\theta_{t+1}|\bar\xi^{t+1})_{i^{t+1}}}(x_{t+1}\,|\,y^{t+1})\,dx_{t+1}},$$

где $U_{t+1}^{i^{t+1}}$, $R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1})$ зависят от y^t и удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$U_{t+1}^{i^{t+1}} = U_t^{i^t} p_{(\xi_{t+1}|\xi^t)_{i^{t+1}}}(y_{t+1}|y^t), \quad U_0^{i_0} = 1, \tag{10}$$

$$R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1}) = \int\limits_{\Omega_{i_t}} R_t^{i^{t-1}}(x_t) p_{(\bar\theta_t|\bar\theta_{t+1},\bar\xi^t)_{i^t}}(x_t|x_{t+1}, y^t) dx_t, \quad R_0^{i^{-1}}(x_0) = 1. \tag{11}$$

Доказательство леммы приведено в приложении.

Как будет показано далее, лемма 1 позволяет в некоторых случаях получить замкнутые рекуррентные алгоритмы фильтрации.

3. Кусочно-линейная задача фильтрации

Пусть последовательность (θ_t, ξ_t) задается для $t=0, 1, \ldots$ уравнениями

$$\theta_{t+1} = f(\theta_t) + F(\theta_t)\varepsilon_{t+1}, \quad \xi_{t+1} = h(\theta_{t+1}) + H(\theta_{t+1})\eta_{t+1}, \tag{12}$$

где (ε_t), (η_t), $t=1, 2, \ldots$ — независимые последовательности независимых гауссовских векторов с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей. Система (12) решается при начальных условиях (θ_0, ξ_0), где случайный вектор (θ_0, ξ_0) предполагается не зависящим от последовательностей (ε_t), (η_t) и имеющим гауссовскую условную плотность вероятности

$$p_{\theta_0|\xi_0}(x_0|y_0) = N_{x_0}\{m_0, \Gamma_0\}$$

с математическим ожиданием m_0 и ковариационной матрицей Γ_0.

Рассмотрим случай, когда $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ кусочно-линейны, а $F(\cdot)$, $H(\cdot)$ кусочно-постоянны:

$$f(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(\theta)[a_i + A_i\theta], \quad h(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(\theta)[b_i + B_i\theta], \tag{13}$$

$$F(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(\theta) F_i, \quad H(\theta) = \sum_{i=1}^{n} I_{\Omega_i}(\theta) H_i.$$

Обозначим

$$v_i = F_i F_i^T, \quad w_i = H_i H_i^T.$$

Зададим для каждой ветви i^t последовательность $(\bar\theta_t, \bar\xi_t)_{i^t}$, $t=0, 1, \ldots$ в силу системы рекуррентных уравнений

$$\bar\theta_{t+1} = a_{i_t} + A_{i_t}\bar\theta_t + F_{i_t}\varepsilon_{t+1}, \quad \bar\xi_{t+1} = b_{i_{t+1}} + B_{i_{t-1}}\bar\theta_{t-1} + H_{i_{t+1}}\eta_{t+1}, \tag{14}$$

решаемой с начальным условием $(\bar\theta_0, \bar\xi_0)_{i_0}$, для которого

$$p_{(\bar\theta_0|\bar\xi_0)_{i_0}}(x_0|y_0) = N_{x_0}\{m_0, \Gamma_0\}.$$

Известно [2], что для последовательности $(\bar\theta_t, \bar\xi_t)_{i^t}$

$$p_{(\bar\theta_t|\bar\xi^t)_{i^t}}(x_t|y^t) = N_{x_t}\{m_t^{i^t}, \Gamma_t^{i^t}\},$$

где параметры $m_t^{i^t}$, $\Gamma_t^{i^t}$ для $t=1, 2, \ldots$ удовлетворяют рекуррентным уравнениям

$$\begin{aligned} m_t^{i^t} &= e_t^{i^{t-1}} + V_t^{i^{t-1}} B_{i_t}^T [W_t^{i^t}]^{-1}[y_t - b_{i_t} - B_{i_t} e^{i^{t-1}}], \\ \Gamma_t^{i^t} &= V_t^{i^{t-1}} - V_t^{i^{t-1}} B_{i_t}^T [W_t^{i^t}]^{-1} B_{i_t} V_t^{i^{t-1}}, \\ V_t^{i^{t-1}} &= v_{i_{t-1}} + A_{i_{t-1}} \Gamma_{t-1}^{i^{t-1}} A_{i_{t-1}}^T, \quad W_t^{i^t} = w_{i_t} + B_{i_t} V_t^{i^{t-1}} B_{i_t}^T, \\ e_t^{i^{t-1}} &= a_{i_{t-1}} + A_{i_{t-1}} m_{t-1}^{i^{t-1}}, \end{aligned} \tag{15}$$

решаемым с начальными условиями $m_0^{i_0} = m_0$, $\Gamma_0^{i_0} = \Gamma_0$.

Кроме того, для линейной системы (14) не представляет труда найти плотности вероятности

$$p_{(\bar{\xi}_{t+1}|\bar{\xi}^t)_{i_{t+1}}}(y_{t+1}\,|\,y^t)=N_{y_{t+1}}\{b_{i_{t+1}}+B_{i_{t+1}}e_{t+1}^{i^t},\ W_{t+1}^{i^{t+1}}\},$$

(16)
$$p_{(\theta_t|\theta_{t+1},\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}(x_t\,|\,x_{t+1},\,y^t)=$$

$$=\begin{cases} N_{x_t}\{\mu_t^{i^t}(x_{t+1}),\ \gamma_t^{i^t}\} & \text{при } \det v_i\neq 0,\ i=1,\ldots,n,\\ \delta\{x_t-A_{i_t}^{-1}(x_{t+1}-a_{i_t})\} & \text{при } v_i=0,\ \det A_i\neq 0,\ i=1,\ldots,n,\end{cases}$$

где

(17)
$$\mu_t^{i^t}(x_{t+1})=m_t^{i^t}+\Gamma_t^{i^t}A_{i_t}^T[V_{t+1}^{i^t}]^{-1}[x_{t+1}-e_{t+1}^{i^t}],$$

(18)
$$\gamma_t^{i^t}=\Gamma_t^{i^t}-\Gamma_t^{i^t}A_{i_t}^T[V_{t+1}^{i^t}]^{-1}A_{i_t}\Gamma_t^{i^t}.$$

Таким образом в рассматриваемом случае получение с помощью леммы 1 замкнутого алгоритма фильтрации сводится к отысканию замкнутого решения уравнения (11). Рассмотрим два частных случая задачи кусочно-линейной фильтрации, для которых уравнение (11) удается решить точно.

Теорема 1. Если $f(\cdot)$ кусочно-постоянна, т. е. в (13)

(19)
$$A_i=0,\ i=1,\ldots,n,$$

то при $\det v_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n$, для $t=1,2,\ldots$ имеем

(20)
$$p_{\theta_t|\xi^t}(x_t\,|\,y^t)=\frac{1}{D_t}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n I_{\Omega_i}(x_t)\,d_{t-1}(j)\,u^{i,j}(y_t)\,N_{x_t}\{m_t^{i,j},\ \Gamma_t^{i,j}\},$$

где

(21)
$$m_t^{i,j}=a_j+v_jB_i^T(w_i+B_iv_jB_i^T)^{-1}(y_t-b_i-B_ia_j),$$

(22)
$$\Gamma_t^{i,j}=v_j-v_jB_i^T(w_i+B_iv_jB_i^T)^{-1}B_iv_j,$$

(23)
$$D_t=\sum_{i=1}^n d_t(i),\quad u^{i,j}(y_t)=N_{y_t}\{b_i+B_ia_j,\ w_i+B_iv_jB_i^T\},$$

(24)
$$d_t(i)=\sum_{j=1}^n d_{t-1}(j)\,u^{i,j}(y_t)\int_{\Omega_i}N_x\{m_t^{i,j},\ \Gamma_t^{i,j}\}\,dx,$$

причем рекуррентное уравнение (24) решается с начальным условием

(25)
$$d_0(j)=\int_{\Omega_j}N_x\{m_0,\ \Gamma_0\}\,dx,\quad j=1,\ldots,n.$$

При этом оптимальная в среднеквадратическом смысле оценка Λ_t компоненты θ_t и ковариационная матрица ошибок фильтрации Δ_t вычисляются по формулам

(26)
$$\Lambda_t=\frac{1}{D_t}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n d_{t-1}(j)\,u^{i,j}(y_t)\,S_t^{i,j},$$

(27)
$$\Delta_t=\frac{1}{D_t}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n d_{t-1}(j)\,u^{i,j}(y_t)\,Q_t^{i,j},$$

где

$$S_t^{i,j}=\int\limits_{\Omega_i} xN_x\{m_t^{i,j},\Gamma_t^{i,j}\}\,dx,\quad Q_t^{i,j}=$$

$$=\int\limits_{\Omega_i}(x-\Lambda_t)(x-\Lambda_t)^T N_x\{m_t^{i,j},\Gamma_t^{i,j}\}\,dx.$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Теорема 2. Если в уравнении для оцениваемой компоненты θ_t отсутствуют случайные возмущения, т. е. в (12) $F(\cdot)=0$, то при $\det A_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n$ для $t=1,2,\ldots$ имеем

$$p_{\theta_t|\xi^t}(x_t\,|\,y^t)=\frac{1}{D_t}\sum_{i_t=1}^{n}\ldots\sum_{i_0=1}^{n} I_{T_t^{i^t}}(x_t)\,U_t^{i^t}N_{x_t}\{m_t^{i^t},\Gamma_t^{i^t}\},\tag{28}$$

$$\Lambda_t=\frac{1}{D_t}\sum_{i_t=1}^{n}\ldots\sum_{i_0=1}^{n}U_t^{i^t}S_t^{i^t},\quad \Delta_t=\frac{1}{D_t}\sum_{i_t=1}^{n}\ldots\sum_{i_0=1}^{n}U_t^{i^t}Q_t^{i^t},\tag{29}$$

где

$$D_t=\sum_{i_t=1}^{n}\ldots\sum_{i_0=1}^{n}U_t^{i^t}P_t^{i^t},\quad P_t^{i^t}=\int\limits_{T_t^{i^t}}N_x\{m_t^{i^t},\Gamma_t^{i^t}\}\,dx,\tag{30}$$

$$S_t^{i^t}=\int\limits_{T_t^{i^t}}xN_x\{m_t^{i^t},\Gamma_t^{i^t}\}\,dx,\tag{31}$$

$$Q_t^{i^t}=\int\limits_{T_t^{i^t}}(x-\Lambda_t)(x-\Lambda_t)^T N_x\{m_t^{i^t},\Gamma_t^{i^t}\}\,dx,\tag{32}$$

$$U_t^{i^t}=U_{t-1}^{i^{t-1}}\cdot N_{y_t}\{b_{i_t}+B_{i_t}e_t^{i^{t-1}},W_t^{i^t}\},\quad U_0^{i_0}=1,\tag{33}$$

а $m_t^{i^t},\Gamma_t^{i^t},e_t^{i^{t-1}},W_t^{i^t}$ удовлетворяют уравнениям (15), в которых $v_i=0$, $i=1,\ldots,n$.

При этом для каждой ветви i^t область $T_t^{i^t}$ задается для $t=0,1,\ldots$ рекуррентно:

$$T_0^{i_0}=\Omega_{i_0},\quad T_{t+1}^{i^{t+1}}=L_{t+1}^{i^t}\cap\Omega_{i_{t+1}},\tag{34}$$

где $L_{t+1}^{i^t}$ есть образ области $T_t^{i^t}$, заданный отображением

$$x=a_{i_t}+A_{i_t}x',\quad x'\in T_t^{i^t},\quad x\in L_{t+1}^{i^t}.\tag{35}$$

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Замечание 1. Формулы фильтрации (28)–(35) существенно упрощаются в случае, когда Ω_i, $i=1,\ldots,n$ не зависят от t, $f(\theta)=\theta$ и, следовательно, в (13) $A_i=E$, $a_i=0$, $i=1,\ldots,n$. В этом случае в силу (34), (35)

$$T_t^{i^t}=\Omega_{i_0}\cap\Omega_{i_1}\cap\ldots\cap\Omega_{i_t}.\tag{36}$$

Но области $\Omega_1,\ldots,\Omega_n$ попарно не пересекаются. Поэтому из (36) следует

$$T_t^{i^t}=\begin{cases}\Omega_i & \text{при } i_0=i_1=\ldots=i_t=i,\\ \phi & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Соответственно в формулах (28), (29) многократные суммы по индексам $i_0,\ldots,i_t$ переходят в суммы по одному индексу i.

Замечание 2. Приведем еще один случай, когда формулы (28)–(35) имеют существенно более простой вид. Пусть Ω_i, $i=1,\ldots,n$ не зависят от t и в (13)

$$\theta=\left\|\begin{matrix}\theta^{(1)}\\ \theta^{(2)}\end{matrix}\right\|,\quad a_i=\left\|\begin{matrix}a_i^{(1)}\\ a_i^{(2)}\end{matrix}\right\|,\quad A_i=\left\|\begin{matrix}A_i^{(1,1)} & A_i^{(1,2)}\\ A_i^{(2,1)} & A_i^{(2,2)}\end{matrix}\right\|,$$

где векторы $\theta^{(1)}$, $\theta^{(2)}$, $a_i^{(1)}$, $a_i^{(2)}$ и матрицы $A_i^{(1,1)}$, $A_i^{(1,2)}$, $A_i^{(2,1)}$, $A_i^{(2,2)}$ имеют размерность соответственно k_1, k_2, k_1, k_2, $k_1\times k_1$, $k_1\times k_2$, $k_2\times k_1$, $k_2\times k_2$ $(k_1+k_2=k)$, причем

$$a_i^{(1)}=0,\quad A_i^{(1,1)}=E,\quad A_i^{(1,2)}=0,\quad A_i^{(2,2)}=E.$$

При этих условиях в (13) области Ω_i, $i=1,\ldots,n$ имеют следующую структуру:

$$\theta\in\Omega_i\Leftrightarrow\{\theta^{(1)}\in\Omega_i^{(1)},\ \theta^{(2)}\in\Omega_i^{(2)}\},$$

где $\Omega_i^{(1)}$ – область E_{k_1}, $\Omega_i^{(2)}$ совпадает со всем E_{k_2}, $\Leftrightarrow$ – «...тогда и только тогда, когда...».

Из (34), (35) для рассматриваемого случая следует, что

$$\theta\in T_t^{i^t}\Leftrightarrow\{\theta^{(1)}\in\Omega_{i_0}^{(1)}\cap\Omega_{i_1}^{(1)}\cap\ldots\cap\Omega_{i_t}^{(1)},\ \theta^{(2)}\in E_{k_2}\}. \tag{37}$$

Но $\Omega_1^{(1)},\ldots,\Omega_n^{(1)}$ попарно не пересекаются. Поэтому из (37) следует, что область $T_t^{i^t}$ непуста тогда и только тогда, когда $i_0=i_1=\ldots=i_t=i$, при этом

$$\theta\in T_t^{i^t}\Leftrightarrow\{\theta^{(1)}\in\Omega_i^{(1)},\ \theta^{(2)}\in E_{k_2}\}.$$

Соответственно в формулах (28), (29) многократные суммы по индексам $i_0,\ldots,i_t$ переходят в суммы по одному индексу i.

4. Обсуждение результатов

Таким образом, показано, что представление известного рекурсивного байесовского соотношения (3) в виде (9)–(11) позволяет в некоторых случаях получать замкнутые рекуррентные алгоритмы фильтрации.

В случае кусочно-линейной системы при отсутствии возмущений в уравнении для оцениваемой компоненты формулы для апостериорной плотности вероятности и оптимального в среднеквадратическом смысле фильтра представляют собой суммы по ветвям $i^t=(i_0,\ldots,i_t)$, $t=0,1,\ldots,$ количество которых увеличивается с ростом t. Однако, как следует из теоремы 1 и замечаний 1, 2 к теореме 2, существует ряд случаев, когда указанный эффект «ветвления» формул фильтрации отсутствует.

Проблемы, связанные с практической реализацией полученных результатов, обусловлены необходимостью алгоритмизации вычисления интегралов типа (30)–(32) от многомерной гауссовской плотности вероятности по области евклидового пространства, а также организации пересчета параметров, определяющих области $T_t^{i^t}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Приведем известное тождество [1]

$$p_{\theta|\xi,\zeta}(x|y,z)p_{\zeta|\xi}(z|y)=p_{\theta|\xi}(x|y)p_{\zeta|\theta,\xi}(z|x,y), \tag{П.1}$$

где случайные векторы θ, ξ, ζ имеют совместную плотность распределения $p_{\theta,\xi,\zeta}(x,y,z)$.

Доказательство леммы 1. Воспользуемся методом математической индукции. При $t=0$ в силу (6)–(8) и тождества (П.1) получаем

$$\psi_{i_0}(x_1,x_0)\,\chi_{i_0}(x_0,y_0,0)=p_{(\bar\theta_1|\bar\xi_0)_{i_0}}(x_1|y_0)\,p_{(\bar\theta_0|\bar\theta_1\,\bar\xi_0)_{i_0}}(x_0|x_1,y_0), \tag{П.2}$$

$$\varphi_{i_1}(y_1|x_1)\,p_{(\bar\theta_1|\bar\xi_0)_{i_0}}(x_1|y_0)=p_{(\bar\xi_1|\bar\xi_0)_{i^1}}(y_1|y_0)\,p_{(\bar\theta_1|\bar\xi^1)_{i^1}}(x_1|y^1). \tag{П.3}$$

Обозначим

$$(\text{П.4})\qquad U_1^{i^1} = p_{(\bar{\xi}_1\,|\,\bar{\xi}_0)_{i^1}}(y_1\,|\,y_0),\qquad R_1^{i_0}(x_1) = \int\limits_{\Omega_{i_0}} p_{(\bar{\theta}_0\,|\,\bar{\theta}_1,\,\bar{\xi}_0)_{i_0}}(x_0\,|\,x_1,\,y_0)\,dx_0.$$

С учетом (П.2), (П.3) и обозначений (П.4) нетрудно убедиться, что соотношение (5) при $t=0$ действительно имеет вид (9).

Пусть для некоторого произвольного t функция $\chi_{i_t}(x_t, y^t, t)$ удовлетворяет соотношениям (9)–(11). Найдем $\chi_{i_{t+1}}(x_{t+1}, y^{t+1}, t+1)$ с помощью (5), подставив в него выражение для функции $\chi_{i_t}(x_t, y^t, t)$ вида (9). В силу (7), (8) и тождества (П.1) получаем

$$(\text{П.5})\qquad \Psi_{i_t}(x_{t+1}, x_t)\, p_{(\bar{\theta}_t\,|\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}(x_t\,|\,y^t) = p_{(\bar{\theta}_{t+1}\,|\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}(x_{t+1}\,|\,y^t)\, p_{(\bar{\theta}_t\,|\,\bar{\theta}_{t+1},\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}\times$$
$$\times (x_t\,|\,x_{t+1}, y^t).$$

$$(\text{П.6})\qquad \zeta_{i_{t+1}}(y_{t+1}, x_{t+1})\, p_{(\bar{\theta}_{t+1}\,|\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}(x_{t+1}\,|\,y^t) = p_{(\bar{\xi}_{t+1}\,|\,\bar{\xi}^t)_{i^t,t-1}}(y_{t+1}\,|\,y^t)\, p_{(\bar{\theta}_{t+1}\,|\,\bar{\xi}^{t+1})_{i^{t+1}}}\times$$
$$\times (x_{t+1}\,|\,y^{t+1}).$$

С учетом (П.5), (П.6) и обозначений (10), (11) убеждаемся, что вычисленная в силу (5) функция $\chi_{i_{t+1}}(x_{t+1}, y^{t+1}, t+1)$ действительно имеет вид (9).

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из (15) следует, что при выполнении условия (19) параметры

$$m_t^{i^t} = m_t^{i_t,\,i_{t-1}},\qquad \Gamma_t^{i^t} = \Gamma_t^{i_t,\,i_{t-1}},$$

вычисленные для ветви i^t, зависят лишь от последней пары индексов (i_{t-1}, i_t) и удовлетворяют уравнениям (21), (22).

При $A_i=0$, $i=1,\ldots,n$ с учетом (15) получаем

$$(\text{П.7})\qquad p_{(\bar{\xi}_{t+1}\,|\,\bar{\xi}^t)_{i^{t+1}}}(y_{t+1}\,|\,y^t) = N_{y_{t+1}}\{b_{i_{t+1}} + B_{i_{t+1}}a_{i_t},\ w_{i_{t+1}} + B_{i_{t+1}}v_{i_t}B_{i_{t+1}}^T\},$$

а из (16)–(18) находим

$$(\text{П.8})\qquad p_{(\bar{\theta}_t\,|\,\bar{\theta}_{t+1},\,\bar{\xi}^t)_{i^t}}(x_t\,|\,x_{t+1}, y^t) = N_{x_t}\{m_t^{i_t,\,i_{t-1}},\ \Gamma_t^{i_t,\,i_{t-1}}\}.$$

Подставляя (П.7) в (10) и используя обозначения (23), получаем

$$(\text{П.9})\qquad U_{t+1}^{i^{t+1}} = U_t^{i^t} u^{i_{t+1},\,i_t}(y_{t+1}),\qquad U_0^{i_0} = 1.$$

Подставляя выражение (П.8) в уравнение (11), нетрудно убедиться, что в данном случае $R_t^{i^{t-1}}(x_t)$ не зависит от x_t и удовлетворяет рекуррентному уравнению

$$(\text{П.10})\qquad R_{t+1}^{i^t} = R_t^{i^{t-1}} \int\limits_{\Omega_{i_t}} N_x\{m_t^{i_t,\,i_{t-1}},\ \Gamma_t^{i_t,\,i_{t-1}}\}\,dx,\qquad R_0^{i_{-1}} = 1.$$

Обозначим

$$(\text{П.11})\qquad d_t(i_t) = \sum_{i_{t-1}=1}^{n} \cdots \sum_{i_0=1}^{n} U_t^{i^t} R_t^{i^{t-1}} \int\limits_{\Omega_{i_t}} N_x\{m_t^{i_t,\,i_{t-1}},\ \Gamma_t^{i_t,\,i_{t-1}}\}\,dx.$$

С помощью (П.9), (П.10) можно убедиться, что $d_t(i_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (24).

Запишем (9) с учетом (П.9), (П.10) и обозначения (П.11) в виде

$$\chi_{i_{t+1}}(x_{t+1}, y^{t+1}, t+1) = \frac{\sum\limits_{i_t=1}^{n} u^{i_{t+1},\,i_t} N_{x_{t+1}}\{m_{t+1}^{i_{t+1},\,i_t},\ \Gamma_{t+1}^{i_{t+1},\,i_t}\}\, d_t(i_t)}{\sum\limits_{i_{t+1}=1}^{n} d_{t+1}(i_{t+1})}.$$

Переобозначая индексы i_t, i_{t+1} соответственно как j, i, убеждаемся с учетом (4) и (23) в справедливости (20).

Формулы (26). (27) для Λ_t, Δ_t нетрудно получить, вычисляя непосредственно моменты условной плотности вероятности (20).

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Решим уравнение (11). Подстановка выражения (16) для случая $v_i=0$, $\det A_i\neq 0$, $i=1,\ldots,n$ в (11) приводит к рекуррентному уравнению

$$(\Pi.12)\qquad R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1}) = R_t^{i^{t-1}}(A_{i_t}^{-1}(x_{t+1}-a_{i_t}))\, I_{\Omega_{i_t}}(A_{i_t}^{-1}(x_{t+1}-a_{i_t})),$$

решаемому с начальным условием $R_0^{i^{-1}}(x_0)=1$.

Докажем, что решение уравнения (П.12) имеет вид

$$(\Pi.13)\qquad R_t^{i^{t-1}}(x) = I_{L_t^{i^{t-1}}}(x),$$

где множество $L_t^{i^{t-1}}$ задано соотношениями (34), (35).

Воспользуемся методом математической индукции. Для $t=0$ из (П.12) получаем

$$R_1^{i_0}(x_1)=I_{\Omega_{i_0}}\{A_{i_0}^{-1}(x_1-a_{i_0})\}.$$

Но в силу (34), (35) условие $x\in L_1^{i_0}$ эквивалентно условию $A_{i_0}^{-1}(x-a_{i_0})\in\Omega_{i_0}$. Тем самым для $t=0$ утверждение (П.13) имеет место.

Пусть для некоторого произвольного t имеет место (П.13). Подставляя (П.13) в (П.12), находим

$$R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1}) = I_{L_t^{i^{t-1}}\cap\Omega_{i_t}}\{A_{i_t}^{-1}(x_{t+1}-a_{i_t})\},$$

откуда в силу (34) и определения области $L_{t+1}^{i^t}$ следует

$$R_{t+1}^{i^t}(x_{t+1}) = I_{L_{t+1}^{i^t}}\{x_{t+1}\},$$

что и завершает доказательство утверждения (П.13).

Формула (28) для $p_{\theta_t|\xi^t}(x_t|y^t)$ следует из соотношения (4) при подстановке в него функции $\chi_{i^t}(x_t, y^t, t)$, заданной формулой (9), с учетом (П.13) и обозначений (30).

Выражения (29) для Λ_t, Δ_t нетрудно получить, вычисляя непосредственно моменты условной плотности вероятности (28) с учетом обозначений (31), (32).

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аоки М.* Оптимизация стохастических систем. М.: Наука. 1971.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). М.: Наука, 1973.
3. *Di Masi G. B., Pratelli M., Runggaldier M. J.* An approximation with error bound for the nonlinear filtering problem. Italy: Ricerche Instituto per Recerche di Dinamica dei Sistemie di Bioingegneria. CNR-LADSEB, Internal report, 1985.

Поступила в редакцию
26.IV.1985

RECURRENT FILTERING ALGORITHMS FOR SOME SYSTEMS WITH NONLINEARITIES OF THE PIECEWISE-LINEAR TYPE

KOLESSA A. Ye.

A partly observable multidimensional sequence (θ_t, ξ_t), $t=0, 1,\ldots$, is described by recurrent equations where the unobservable component θ_t varies in a piecewise linear way and the additive disturbances are of the white noise type. When the equation of the unobservable component does not contain random disturbances, the filtering problem is accurately solved by closed recurrent equations for the a posteriori probability density and for a mean square-optimal filter.