

**РАДИОТЕХНИКА
И ЭЛЕКТРОНИКА**

№ 8

МОСКВА. 1961

О ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ВОГНУТОЙ ПОВЕРХНОСТИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Б. Е. Кинбер

Дифракция краевой волны Зоммерфельда на вогнутой поверхности зеркала приводит к многократным отражениям этой волны и появлению волн «шепчущей галереи». В статье эти эффекты исследованы на модели, составленной из нити тока, помещаемой внутри краевого цилиндра. Введение многолиственности позволяет удовлетворить условию излучения. Исследованы закономерности геометрической оптики, поле вблизи каустики волны шепчущей галереи.

ВВЕДЕНИЕ

Известные в настоящее время решения дифракционных задач относятся в подавляющем большинстве к выпуклым телам [1, 2]. В пределе при $\lambda \rightarrow 0$ они переходят в решения геометрической оптики, которая дает в этих случаях однократно отражающиеся и расходящиеся пучки лучей. Между тем известно [3, 4], что дифракция на вогнутых телах дает ряд качественно новых эффектов: каустические поверхности поля, многократные отражения, эффект шепчущей галереи и т. д.

Исследованные случаи дифракции на вогнутых телах — параболическом цилиндре [5] и параболоиде вращения [6] — при возбуждении из фокуса не характерны, так как в пределе дают одно отражение. Особенности дифракции на вогнутом теле проявляются тогда, когда источник расположен вблизи стенки и решение геометрической оптики дает многократные отражения.

Анализ дифракционных эффектов усложняется тем, что из-за технических трудностей вычисления удается провести лишь для тел простейшей формы, среди которых вогнутой поверхностью обладают только замкнутые полости (внутренняя поверхность цилиндра, сферы, эллипсоида и т. д.).

Возбуждение замкнутого объема источником, помещенным внутри него, приводит к появлению в объеме стоячих, а не бегущих волн, характерных для внешней задачи теории дифракции.

В работе [2] волны, многократно обегаящие поверхность цилиндра, формально рассматриваются расположенными не на обычной, а на римановой плоскости. С такой точки зрения волна, возбужденная источником, обегая начало координат, никогда больше не возвращается к месту возбуждения.

Если применить этот прием для внутренних задач, можно считать, что поле, возбуждаемое источником, расположенным внутри замкнутого объема, удовлетворяет принципу излучения. Однако при этом интересующее нас дифракционное поле должно рассматриваться на каждом листе отдельно.

В настоящей работе рассмотрена простейшая задача дифракции на вогнутой поверхности — внутренней поверхности кругового цилиндра. Источником поля является нить тока. Эта задача может рассматриваться также как предельный случай бесконечного тонкого спирального волновода прямоугольного сечения при нулевом радиусе кривизны внутренней стенки и нулевом шаге спирали. Для решения вводится система

нормальных волн, бегущих по направлению $\pm \varphi$. Эта система волн эквивалентна системе волноводных волн для спиральных волноводов. Далее строится функция Грина задачи. Анализ полученного решения позволяет описать многократные отражения краевой волны, поле вблизи каустика и эффект шепчущей галереи на вогнутой поверхности цилиндрического зеркала конечного размера.

1. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ЗАДАЧИ

Определим собственные функции волнового уравнения

$$\Delta U + k^2 U = 0, \quad (1)$$

где U — потенциал Герца *, для внутренней области кругового цилиндра радиуса a , расположенного на бесконечнолистной плоскости при обычных граничных условиях

$$U = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial r} = 0. \quad (3)$$

Вводя цилиндрические координаты r, φ и разделяя переменные, получим

$$\Phi'' + \nu^2 \Phi = 0, \quad (4)$$

$$(kr)^2 Z'' + (kr) Z' + [(kr)^2 - \nu^2] Z = 0, \quad (5)$$

$$U = \Phi(\varphi) Z(kr), \quad (6)$$

где ν — постоянная разделения.

Собственные функции и собственные значения ν_s определяются как решения (5) при граничных условиях (2) или (3).

Рассмотрим вначале решение (5) $Z_\nu = \alpha J_\nu(kr) + \beta J_{-\nu}(kr)$ (для однозначности $\operatorname{Re} \nu > 0$) задачи о поле между двумя соосными цилиндрами радиусов a и b , а затем перейдем к пределу $b \rightarrow 0$. Это приводит к уравнению

$$J_\nu(ka) J_{-\nu}(kb) - J_{-\nu}(ka) J_\nu(kb) = 0$$

при граничном условии (2) и к уравнению

$$J'_\nu(ka) J'_{-\nu}(kb) - J'_{-\nu}(ka) J'_\nu(kb) = 0$$

при граничном условии (3).

Переходя к пределу $b \rightarrow 0$ и учитывая, что при $x \ll 1$ $J_m(x) \sim x^m$, получим, что собственные значения ν_s определяются соответственно как корни уравнений

$$J_\nu(ka) = 0, \quad (7)$$

$$J'_\nu(ka) = 0 \quad (8)$$

при граничных условиях (2) и (3) и дополнительном условии $\operatorname{Re} \nu > 0$.

Уравнение (7) или (8) при $\operatorname{Re} \nu > 0$ имеет бесконечное количество корней, из которых примерно $2a/\lambda$ действительны ($0 \leq \nu \leq ka$) и соответствуют незатухающим волноводным волнам. Остальные корни мнимы и соответствуют затухающим волнам.

Два независимых решения (4)

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= e^{i\nu\varphi}, \\ \Phi_2 &= e^{-i\nu\varphi} \end{aligned} \quad (9)$$

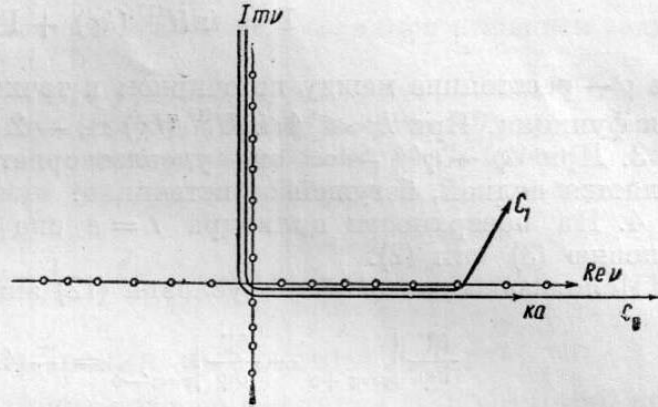
соответствуют двум системам волн, бегущим по углу φ в противоположных направлениях.

* Векторы поля пропорциональны U или его производным. Поэтому далее рассматривается лишь сама функция U .

Условие $\text{Im } \nu > 0$ вытекает из принципа излучения. Следовательно, все собственные значения (7) или (8) содержатся в первом квадранте комплексной плоскости ν (рис. 1).

Поле каждой собственной волны «прижато» к вогнутой стенке цилиндра (эффект Краснушкина [4]). При $kr > \nu$ зависимость от r — осциллирующая; при $kr < \nu$ поле монотонно убывает с удалением от стенки, т. е. с уменьшением r (рис. 2).

Рис. 1. Расположение корней уравнения $J_\nu(ka) = 0$ (или $J'_\nu(ka) = 0$) на комплексной плоскости ν . Собственные значения задачи соответствуют корням, расположенным в первом квадранте. Наибольший действительный корень $\approx ka$



Структура собственных волн вогнутой поверхности близка к структуре собственных волн для плоскослойной среды в случае приземного волновода [8].

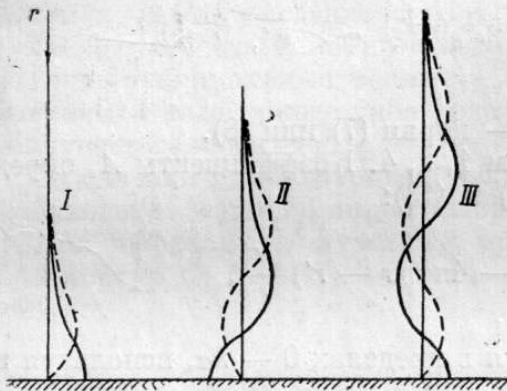


Рис. 2. Профили трех первых нормальных волн. Нижняя черта соответствует стенке цилиндра $r = a$. Первая собственная волна соответствует наибольшему действительному ν . Сплошная линия — граничное условие $dU/dr = 0$, пунктир — граничное условие $U = 0$

В области $kr > \nu$ величина ν/r является ф-й составляющей, а величина $\sqrt{k^2 - (\frac{\nu}{r})^2}$ — r -й составляющей волнового вектора k . Это вытекает из асимптотического разложения для бesselевых функций

$$J_\nu(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos \xi}{\sqrt{(kr)^2 - \nu^2}}, \quad |kr - \nu| > (kr)^{1/2}, \quad (10)$$

где

$$\xi = \sqrt{(kr)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{kr} - \frac{\pi}{4}, \quad (11)$$

откуда

$$k_r = \frac{d\xi}{dr} = \sqrt{(k)^2 - \left(\frac{\nu}{r}\right)^2};$$

$$k_\phi = \frac{\nu}{r}.$$

2. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Определим функцию Грина $\Gamma = \Gamma(r, \varphi, r', \varphi')$ задачи, т. е. функцию, обладающую следующими свойствами.

1. Она удовлетворяет уравнению (1), за исключением точки (r', φ') , где находится источник.

2. В точке (r', φ') она имеет особенность, соответствующую двумерной δ -функции $-4\pi\delta(x - x', y - y')$, или, иначе говоря, вблизи источника

$$\Gamma = i\pi H_0^{(1)}(kr) + \Gamma', \quad (12)$$

где ρ — расстояние между источником и точкой наблюдения; Γ' — конечная функция. При $kr \ll 1$ $i\pi H_0^{(1)}(kr) \simeq -2 \ln kr$.

3. При $|\varphi - \varphi'| \rightarrow \infty$ она удовлетворяет условию излучения, т. е. является волной, бегущей от источника.

4. На поверхности цилиндра $r = a$ она удовлетворяет граничному условию (3) или (2).

Используем далее вместо условия (12) эквивалентное условие

$$\left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi'+0} - \left. \frac{\partial \Gamma}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=\varphi'-0} = -4\pi r' \delta(r - r'). \quad (13)$$

Будем искать функцию Γ в виде

$$\Gamma = \sum_s A_s J_{\nu_s}(kr) e^{i\nu_s \varphi} e^{-i\nu_s \varphi'}, \quad \varphi > \varphi', \quad (14)$$

$$\Gamma = \sum_s A_s J_{\nu_s}(kr) e^{-i\nu_s \varphi} e^{i\nu_s \varphi'}, \quad \varphi < \varphi',$$

где A_s — искомые коэффициенты; ν_s — корни (7) или (8).

Ряды (14) удовлетворяют свойствам 1, 2, 4. Коэффициенты A_s определим из условия (13). Подставляя (14) в (13):

$$\sum_s \frac{A_s}{r} J_{\nu_s}(kr) 2i\nu_s = -4\pi\delta(r - r') \frac{r'}{r},$$

умножая обе части на J_{ν_s} , интегрируя в пределах $0 - ka$, используя известное соотношение

$$\int \frac{J_n J_m}{x} dx = \frac{x [J_m J'_n - J_n J'_m]}{n^2 - m^2}$$

и граничное условие (7) или (8), получим

$$A_s = i2\pi \frac{J_{\nu_s}(kr')}{\nu_s N_s}, \quad (15)$$

где

$$N_s = -\frac{ka}{2\nu_s} \frac{d}{d\nu} J_{\nu} \frac{d}{d(kr)} J_{\nu} \Big|_{r=a}^{\nu=\nu_s}, \quad (16)$$

при граничном условии (7) и

$$N_s = \frac{ka}{2\nu_s} J_{\nu}(ka) \frac{d^2}{d\nu d(kr)} J_0 \Big|_{r=a}^{\nu=\nu_s} \quad (17)$$

при граничном условии (8).

Ряды

$$\Gamma = -\frac{4\pi i}{ka} \sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr) J_{\nu_s}(kr')}{\frac{dJ_{\nu_s}(ka)}{d\nu} \frac{dJ_{\nu_s}(ka)}{d(kr)}} e^{i\nu_s|\varphi-\varphi'|}, \quad (18a)$$

$$\Gamma = \frac{4\pi i}{ka} \sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr) J_{\nu_s}(kr')}{J_{\nu_s}(ka) \frac{d^2}{d\nu d(kr)} J_{\nu_s}(ka)} e^{i\nu_s|\varphi-\varphi'|} \quad (18б)$$

удовлетворяют всем поставленным условиям и являются решением задачи для граничных условий (2) и (3).

Поместим в случае граничного условия (8) источник на стенку ($r' = a$, $\varphi' = 0$) и будем рассматривать (18б) как сумму вычетов. Функция Грина может быть переписана в виде интеграла по контуру C_0 (рис. 1), охватывающего все корни (7) или (8), расположенные в первом квадранте комплексной плоскости,

$$\Gamma = \frac{2}{ka} \int_{C_0} \frac{J_{\nu}(kr)}{J'_{\nu}(ka)} e^{i\nu|\varphi|} d\nu. \quad (19)$$

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ Γ

Непосредственное вычисление поля по формулам (18) возможно лишь при относительно небольших ka . Расчет поля вдали от источника ($kr \gg 1$) требует учета по крайней мере всех распространяющихся волн. Как показано ниже, при $ka \gg 1$ часть нормальных волн, для которых $kr > \nu$, может быть заменена лучами.

Количество лучей при $|\varphi - \varphi'| < \pi$ много меньше количества нормальных волн. Введение лучей объясняет физическую картину поля и сильно облегчает количественный расчет.

Однако нормальные волны, у которых $\nu_s \simeq ka$, не могут быть представлены в виде какого-либо рода лучей и интерпретируются как волны шепчущей галереи.

Будем далее рассматривать область точек наблюдения вдали от места возбуждения ($kr \gg 1$), но расположенных на первом листе ($|\varphi - \varphi'| < \pi$).

Для перехода к лучевому представлению трансформируем контур C_0 в контур C_1 (рис. 1), охватывающий лишь часть действительных корней

$$0 < \nu < ka - (ka)^{1/2} \quad (20)$$

и уходящий далее вверх в бесконечность.

Интеграл по оставшейся за C_1 областью представим в виде суммы вычетов. Этот прием, при котором результирующее поле представляется в виде суммы лучей и нормальных волн, не является однозначным. Однако при любом количестве выделенных нормальных волн он остается справедливым.

С учетом сказанного

$$\Gamma = \frac{2}{ka} \int_{C_1} \frac{J_{\nu}(kr)}{J'_{\nu}(ka)} e^{i\nu|\varphi|} d\nu + \frac{4\pi i}{ka} \sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)}{\frac{d^2}{d\nu d(kr)} J_{\nu_s}(ka)} e^{i\nu_s|\varphi|}, \quad (21)$$

причем сумма (21) берется по всем корням (8), не удовлетворяющим (20).

При вычислениях интеграла (21) применим метод стационарной фазы. Вычисления для точек стационарной фазы $\tilde{\nu}$, удовлетворяющих условию

$$0 < \tilde{\nu} < kr - (kr)^{1/2}, \quad (22)$$

дают лучи геометрической оптики. Точки стационарной фазы в области

$$kr - (kr)^{1/2} < \tilde{\nu} < ka - (ka)^{1/2} \quad (23)$$

соответствуют полю вблизи и за пределами каустик лучей.

А. Лучи геометрической оптики. Будем вначале считать, что условие (22) справедливо на всем контуре C_1 и, следовательно, для J_ν можно использовать асимптотическое разложение Дебая (10). Однако при вычислениях мы будем использовать не все корни уравнения стационарной фазы, а лишь те из них, которые лежат внутри интервала (22).

Подставляя (10) в интеграл в (21) и учитывая, что

$$J'_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{x^2 - \nu^2}}{x} \sin \xi,$$

получим

$$\frac{\cos \xi_r}{\cos \xi_a} = -i(e^{i\xi_r} + e^{-i\xi_r}) \sum_0^\infty e^{i(2n+1)\xi_a},$$

$$\frac{2}{ka} \int_{C_1} \frac{J_\nu(kr)}{J'_\nu(kr)} e^{i\nu \cdot \varphi} dv = 2i \sum_0^\infty \int_{C_1} \frac{e^{i\psi_n^+} + e^{i\psi_n^-}}{\sqrt{(ka)^2 - \nu^2} \sqrt{(kr)^2 - \nu^2}} dv, \quad (24)$$

где

$$\psi_n^\pm = \pm \xi_r + (2n+1)\xi_a + \nu\varphi;$$

$$\xi_r = \sqrt{(kr)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{kr} - \frac{\pi}{4}; \quad (25)$$

$$\xi_a = \sqrt{(ka)^2 - \nu^2} - \nu \arccos \frac{\nu}{ka} - \frac{\pi}{4}.$$

Каждый из интегралов в правой части (24) вычислим методом стационарной фазы.

Точки стационарной фазы $\tilde{\nu}$ определяются как корни уравнения

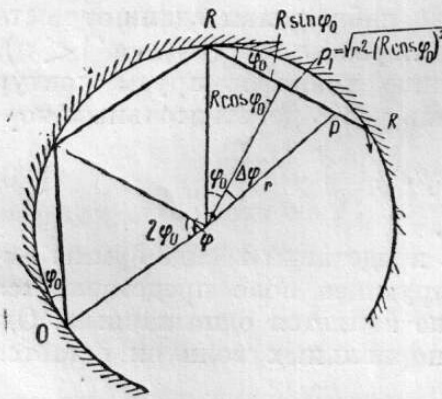


Рис. 3. Построение n -кратно отраженного луча: O — точка излучения, R — точка наблюдения, $R = a$

$$\frac{d\psi_n^\mp}{d\nu} = \pm \arccos \frac{\tilde{\nu}}{kr} +$$

$$+ \varphi - (2n+1) \arccos \frac{\tilde{\nu}}{ka} = 0 \quad (26)$$

или, обозначая

$$\varphi_0 = \arccos \frac{\tilde{\nu}}{ka}, \quad \Delta\varphi = \arccos \frac{\tilde{\nu}}{kr},$$

$$\varphi = (2n+1)\varphi_0 \mp \Delta\varphi. \quad (26a)$$

Геометрический смысл φ_0 и $\Delta\varphi$ показан на рис. 3. Непосредственное решение (26) относительно ν приводит к уравнению $4n+2$ степени и возможно лишь при $r = a$.

Обойдем эту трудность, рассматривая вначале $\tilde{\nu}$ как заданное и определяя все точки наблюдения $r = r(\varphi)$, соответствующие данной точке стационарной фазы.

Из (26) следует, что

$$r = \frac{a \cos \varphi_0}{\cos [\varphi - (2n+1)\varphi_0]}, \quad (27)$$

т. е. геометрическим местом $r(\varphi)$ является прямая, определяемая отрезком $a \cos \varphi_0$, повернутым на угол $(2n+1)\varphi_0$.

Легко видеть (см. рис. 3), что эта прямая является лучом, вышедшим под углом φ_0 к стенке и отразившимся n раз. Случай $n = 0$ соответствует первичной волне источника.

Рассмотрим теперь огибающую, каустику семейства лучей, испытанных n отражений.

Из параметрических уравнений каустики

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi_0} = 0 \text{ или } \varphi = (2n + 1)\varphi_0 - \arctg \frac{\operatorname{tg} \varphi_0}{2n + 1} \quad (28)$$

и (26) следует, что точка касания каустики лучом (рис. 4) расположена на расстоянии $a \sin \varphi_0 \left(1 - \frac{1}{2n + 1}\right)$ от места отражения. Для $n=0$ каустикой является сам источник.

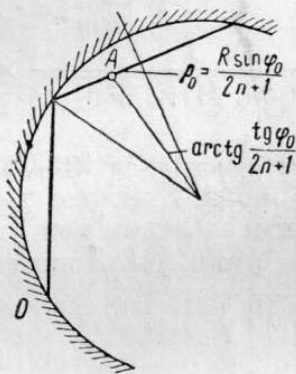


Рис. 4

Рис. 4. Построение точки касания луча и каустики: A — точка касания; $R = a$

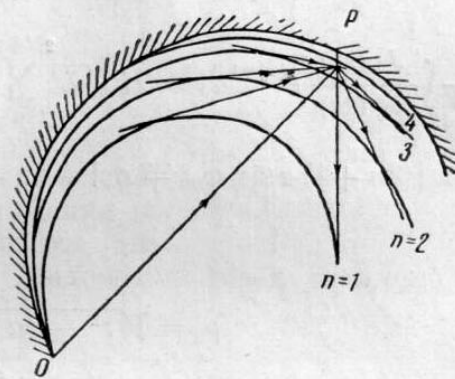


Рис. 5

Рис. 5. Каустики n -кратно отраженных лучей. Лучи, проходящие через точку наблюдения P , должны касаться каустик. Общее количество лучей определяется числом каустик N , расположенных между точкой P и центром окружности

Для $\varphi_0 < 1$ и $n > 1$ можно приближенно написать уравнение каустики в явном виде *:

$$r \simeq a \cos \frac{\varphi}{2n + 1}. \quad (29)$$

На рис. 5 показано семейство каустик для $n = 1, 2, 3, 4$.

Теперь можно непосредственно определить все стационарные точки \tilde{v} для каждого n для заданной точки наблюдения (r, φ) . Они определяются через углы φ_0 для всех $2N + 1$ лучей, которые касаются каустик и проходят через точку (r, φ) . Для $n > 0$ всегда существуют два n -кратно отраженных луча: один до касания каустики (член ψ^-), другой после касания каустики (член ψ^+).

Общее количество лучей и, следовательно, точек стационарной фазы в сумме (24) ограничено и равно $2N + 1$, т. е. определяется числом N каустик, лежащих между точкой наблюдения и центром цилиндра.

Чем ближе точка наблюдения к стенке, тем больше N . При $r = a$ решение (26) получается в явном виде

$$\tilde{v} = ka \cos \frac{\varphi}{2m},$$

* Интересно отметить, что каустики в приближении (29) отличаются друг от друга лишь «масштабом» по углу φ .

где

$$\begin{aligned} m &= n \text{ для } \psi^+, \\ m &= n + 1 \text{ для } \psi^-. \end{aligned} \quad (30)$$

Из (30) следует, что в случае $r = a$, $N = \infty$, а точки стационарной фазы сгущаются вблизи ka , что для $n \gg 1$ нарушает исходную аппроксимацию J_ν .

Рассмотрим теперь амплитуды и фазы отдельных лучей. Образую

$$(\psi^\mp)'' = \mp \frac{1}{\sqrt{(kr)^2 - \nu^2}} + (2n + 1) \frac{1}{\sqrt{(ka)^2 + \nu^2}}, \quad (31)$$

подставляя вместо $\tilde{\nu}$ выражение $ka \cos \varphi_0$ и интегрируя (24), получим

$$\begin{aligned} \frac{2}{ka} \int \frac{J_\nu(kr)}{J_\nu(ka)} e^{i\nu|\varphi|} d\nu &= 2i \sqrt{\lambda} \sum_0^{2N+1} \frac{1}{\sqrt{(2n+1)|\rho_0 \mp \rho_1|}} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[k \left[(2n+1) a \sin \varphi_{0n} \mp \varrho_1 \right] - \left(n + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(\rho_1 \mp \rho_0) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sqrt{r^2 - (a \cos \varphi_0)^2}, \\ \rho_1 &= \frac{a \sin \varphi_0}{2n + 1}. \end{aligned} \quad (33)$$

Геометрический смысл ρ_0 и ρ_1 пояснен на рис. 3 и 4. Из (32) следует, что лучи удовлетворяют закономерностям геометрической оптики, т. е. а) поток мощности переносится лучевой трубкой, б) фаза пропорциональна длине пути, в) при прохождении каустики фаза испытывает скачок на $-\pi/2$. При n отражениях лучевая трубка расширяется в $2n + 1$ раз.

Б. Поле вблизи и за границей каустики (точка наблюдения не лежит на стенке ($r < a$)). Как следует из изложенного выше, часть точек стационарной фазы попадает в область, где асимптотическое разложение Дебая для $J_\nu(kr)$ недействительно, хотя оно еще справедливо для $J_\nu(ka)$. С точки зрения геометрических представлений это означает, что или точка наблюдения расположена вблизи каустики каких-либо лучей, или часть лучей «пролетает» между точкой наблюдения и стенкой. Если в первом случае законы геометрической оптики дают излишне большие значения амплитуды, то во втором случае — «нулевые» амплитуды. В действительности дифракция «смазывает» оба явления. Рассмотрим их более подробно. Если точка наблюдения перемещается по лучу (т. е. $\tilde{\nu} = \text{const}$ для одного из членов суммы), то в середине луча $\tilde{\nu} = kr$ и асимптотика Дебая неприменима. Кроме того, в точке $\rho_0 = \rho_1$ касания лучом каустики, как следует из (31), $\psi''(\tilde{\nu}) = 0$ и несправедливо проведенное выше интегрирование.

Хотя формально асимптотика Дебая неприменима вблизи середины луча, она дает правильный ответ в рассматриваемом приближении, так как согласно (32) амплитуда плавно меняется вдоль луча. Это связано с тем, что произведение $\sqrt{(kr)^2 - \nu^2} \sqrt{\psi''}$ остается непрерывным в середине луча.

Вблизи точки касания лучом каустики в разложении ψ необходимо сохранять кубический член, что приводит при интегрировании (24)

к функции Эйри. Это приближение переходит в приближение геометрической оптики вдали от каустики и дает конечное значение амплитуды в области каустики. Максимальные значения амплитуды находятся не на линии каустики, а смещены несколько ближе к границе цилиндра, т. е. по обе стороны от точки касания лучом каустики, если двигаться по лучу. При смещении точки наблюдения за границу каустики, ближе к центру цилиндра, для числителя подынтегрального выражения (21) необходимо применять асимптотику Фока [7]

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} v(t), \quad (34)$$

где $v(t)$ — функция Эйри;

$$t = \left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} (v - kr);$$

$$v(t) \sim |t|^{-1/4} \sin \left[\frac{2}{3} (-t)^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right], \quad t < -1;$$

$$v(t) \sim \frac{1}{2} t^{-1/4} \exp \left[-\frac{2}{3} t^{3/2} \right], \quad t > 1. \quad (35)$$

Для расчета влияния лучей, расположенных между точкой наблюдения и стенкой, необходимо использовать аппроксимацию (34) для $J_\nu(kr)$. Положение точек стационарной фазы

$$\Phi_{0m} = \frac{\varphi}{2m+1}$$

показывает (см. рис. 6), что основной вклад в поле дается ближайшим m -кратно отраженным лучом, пролетающим между точкой наблюдения и стенкой цилиндра. Амплитуда этого поля экспоненциально зависит от расстояния между лучом и точкой наблюдения.

Распространение волны по этому участку (от луча до точки наблюдения) происходит с бесконечной фазовой скоростью (как и в случае приземного волновода, для точки наблюдения, расположенной над волноводным каналом [8]).

4. ВОЛНА ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

Как показано выше, интеграл по контуру C_1 дает поле лучей геометрической оптики и поле в окрестности каустики. При вычислениях всюду принималось $v < ka - (ka)^{1/3}$, т. е. часть корней (8) была обойдена контуром C_1 и интеграл был заменен суммой вычетов.

Ниже мы преобразуем эту сумму в (21) и проанализируем вклад этих волн.

При $v \sim ka$ и $v \sim kr$ можно для $J_\nu(kr)$ и $\frac{d^2}{d\nu d(kr)} J_\nu(ka)$ применить асимптотику Фока [7], согласно которой

$$J_\nu(kr) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{kr}\right)^{1/3} v(t), \quad (36)$$

$$\frac{d^2 J_\nu(kr)}{d\nu d(kr)} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2}{kr} tv(t). \quad (37)$$

Подставляя (36), (37) в сумму (21), получим

$$\frac{4\pi i}{ka} \sum_s \frac{J_{\nu_s}(kr)}{\frac{d^2}{d\nu d(kr)} J_\nu(ka)} e^{i\nu_s \varphi} = -2\pi i \left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3} m \sum_s \frac{v[m(t_s + y)]}{v(t_s) t_s} e^{i\nu_s \varphi}, \quad (38)$$

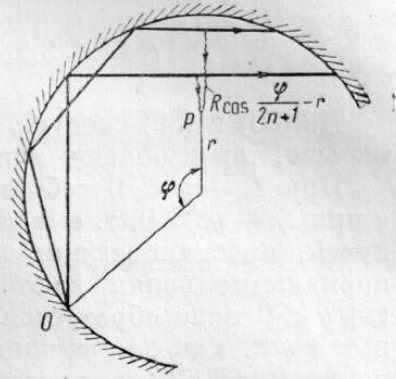


Рис. 6. Вклад в поле в точке наблюдения P от лучей, пролетающих ближе P к стенке цилиндра; $R = a$

где

$$m = \left(\frac{a}{r}\right)^{1/3}; \quad y = k(a-r)\left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3}; \quad p_s = ka - \left(\frac{ka}{2}\right)^{1/3} t_s;$$

t_s — s -й корень уравнения $v'(t) = 0$;

$$t_0 = -1,01; \quad t_2 = -4,82;$$

(39)

$$t_1 = -3,25; \quad t_s \simeq -\left\{\frac{3}{2}\left[(2s+1)\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right]\right\}^{2/3}.$$

Из (38) и (39) следует, что $t_s < 0$, а величина $t_s + y$ может быть как меньше, так и больше нуля.

При $t_s + y < 0$ собственная волна имеет осциллирующий характер, а при $t_s + y > 0$, т. е. вдали от стенки, — затухающий. Аналогично полю лучей, проскакивающих между точкой наблюдения и стенкой, первые нормальные волны дают слабые вклады в поле вдали от стенки. При $t_s + y < 0$ поле образуется как за счет обычных, так и за счет нормальных волн. Так как функции $v(t)$ хорошо табулированы [8], вычисления по формуле (38) не представляют большого труда.

При $r = a$ сумма (38) значительно упрощается и равна

$$2\pi i \left(\frac{2}{ka}\right)^{1/3} \sum_s \frac{e^{ip_s \varphi}}{t_s}. \quad (40)$$

Из последнего выражения следует, что при $ka \gg 1$ по поверхности цилиндра бежит волна, амплитуда которой весьма мало уменьшается с ростом φ . В этой совокупности нормальных волн основной волной является низшая собственная волна цилиндра.

Таким образом, расчет подтверждает точку зрения Релея [3] о том, что аномально слабое затухание звука непосредственно у вогнутой стенки связано не с фокусировкой отраженных лучей, а с наличием специфической волны, прилегающей к вогнутой стенке. Эта волна аналогична волне в приземном волноводе [8].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты ранее проделанных расчетов дифракции на выпуклых телах показывают, что в пределе при $\lambda \rightarrow 0$ поле можно представить в виде суммы «лучей», удовлетворяющих принципу Ферма. Часть этих лучей является обычными лучами геометрической оптики, часть — дифракционными лучами [2], бегущими по поверхности тела и экспоненциально затухающими в области тени.

Результаты настоящего расчета показывают, что асимптотическое представление поля в виде суммы лучей справедливо также и для дифракции на вогнутой поверхности. В этом случае характерна множественность лучей геометрической оптики. Эквивалентом затухающих дифракционных лучей Келлера являются незатухающие лучи шепчущей галереи, бегущие по поверхности тела. Эти лучи следует рассматривать скорее как волны волноводного типа, ведомые вогнутой поверхностью тела.

Замедление спадания поля заметно даже при движении точки наблюдения от источника на постоянном расстоянии от стенки, превышающем толщину слоя волны шепчущей галереи. По мере увеличения φ вследствие пересечения линий каустик возрастает количество приходящих лучей и поле затухает в среднем медленнее, чем $\sqrt{a\varphi}$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну и А. А. Федорову за внимание и ценные советы при написании этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Менцер, Дифракция и рассеяние радиоволн, перев. с англ., Изд. Советское радио, 1958.
2. Л. А. Вайнштейн, А. А. Федоров, Рассеяние плоских и цилиндрических волн на эллиптическом цилиндре и концепция дифракционных лучей, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 31.
3. Релей, Теория звука, II, § 287, ГТИ, 1940.
4. П. Е. Краснушкин, Метод нормальных волн в применении к проблеме дальних радиосвязей, Изд. МГУ, 1947.
5. Г. А. Гринберг, Н. Н. Лебедев, Н. П. Скальская, Я. С. Уфлянд, Волновая задача для параболического цилиндра, Докл. АН СССР, 1954, 95, 5, 951.
6. В. А. Фок, Теория дифракции от параболоида вращения, Сб. Дифракция электромагнитных волн на некоторых телах вращения, Изд. Советское радио, 1957.
7. В. А. Фок, Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности, Изд. АН СССР, 1946.
8. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, Изд. АН СССР, 1957.

Поступила в редакцию
18 X 1960